Mathématiques - Devoir surveillé n° 2

BTS MS - 27.11.2019

Exercice 1 (4 points) :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x + 3x + 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln(x) - x + 4$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{x} + 2$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 3$

Exercice 2 (4 points) :

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+2)\cos(x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. On rappelle que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.
   En déduire que le développement limité de f en 0 d'ordre 2 est : $f(x) = 2 + x - x^2 + x^2\psi(x)$, où ψ est une fonction vérifiant : $\lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$.
2. En déduire l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$ au voisinage de 0.

Exercice 3 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.
2. Déterminer le signe de f' et en déduire les variations de f (faire un tableau).
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote (donner son équation).
4. On admet que le développement limité en 0 de f d'ordre 4 est : $1 - x^2 + x^4 + x^4\varphi(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.
   En déduire l'équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 4 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5}x - \ln(x^2+1)$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{(x-2)(2x-1)}{x^2+1}$
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Compléter le tableau de variation.
4. On admet que le développement limité de f en 0 d'ordre 4 est : $f(x) = \dfrac{4}{5}x - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^4\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.
   En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.