Correction du devoir surveillé n° 2

BTS MS - 27.11.2019

Exercice 1 :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + 3x + 1 = +\infty}$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x \to 0^+} -x = 0$
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln(x) - x + 4 = -\infty}$

3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty \\ \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0\infty \end{array}\right\}$ donc, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} = 0$
   Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x} - \dfrac{1}{x} + 2 = 2}$

4. D'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} - 3 = +\infty}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+2)\cos(x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. On développe :

$$(x+2) \times (1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varphi(x))$$
$$= x - \frac{x^3}{2} + x^3\varphi(x) + 2 - x^2 + 2x^2\varphi(x)$$
$$= 2 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + x^3\varphi(x) + 2x^2\varphi(x) \qquad \text{(en remettant dans l'ordre)}$$
$$= 2 + x - x^2 + x^2\left(\frac{x}{2} + x\varphi(x) + 2\varphi(x)\right) \qquad \text{(en mettant } x^2 \text{ en facteur).}$$

   Si on pose : $\psi(x) = \dfrac{x}{2} + x\varphi(x) + 2\varphi(x)$ (le contenu de la parenthèse), on a : $f(x) = 2 + x - x^2 + x^2\psi(x)$.

   Il reste à vérifier que $\psi(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0.
   Or : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{2} = 0$
   $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$ et donc a fortiori : $\lim\limits_{x \to 0} x\varphi(x) = 0$
   On a bien : $\lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$

2. Il suffit de tronquer le développement limité de la question précédente à l'ordre 1.
   L'équation de la tangente en 0 est donc : $\boxed{y = 2 + x}$.

3. On a : $f(x) - (2+x) = x^2 + x^2\psi(x)$ d'après la question 1.
   Comme $\psi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, $f(x) - (2+x)$ est du signe de x^2 pour x assez petit.
   Par conséquent, au voisinage de 0, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. On pose : $v(x) = 1 + x^2$; alors $v'(x) = 2x$.
   On a : $f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$, donc $f'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$.
   Ainsi : $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

2. $(x^2+1)^2$ est toujours positif (c'est un carré), donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.
   On obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + x^2 = +\infty$
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{y} = 0\end{array}\right\}\text{ donc, par composition : } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
   On en déduit que $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = 0$.

4. En tronquant le développement limité donné à l'ordre 1, on trouve que l'équation de $\mathcal{T}_0$ est : $y = 1$

Exercice 4 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4}{5}x - \ln(x^2+1)$.

1. On sait que la dérivée de $x \mapsto \ln[u(x)]$ est $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
   On pose : $u(x) = x^2 + 1$; alors $u'(x) = 2x$.
   Donc : $f'(x) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2x}{x^2+1}$.
   On réduit au même dénominateur :
   $$f'(x) = \frac{4(x^2+1)}{5(x^2+1)} - \frac{5\times 2x}{5\times(x^2+1)}$$
   $$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 5\times 2x}{5(x^2+1)}$$
   $$f'(x) = \frac{4x^2 + 4 - 10x}{5(x^2+1)}$$
   $$f'(x) = \frac{2(2x^2 - 5x + 2)}{5(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5} \times \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}$$
$$f'(x) = \frac{2}{5} \times \frac{2x^2 - 4x - x + 2}{x^2 + 1}$$
$$f'(x) = \frac{2}{5} \times \frac{2x(x-2) - (x-2)}{x^2 + 1}$$
$$f'(x) = \frac{2}{5} \times \frac{(2x-1)(x-2)}{x^2 + 1} = \frac{2}{5} \times \frac{(x-2)(2x-1)}{x^2 + 1}$$

On peut aussi, bien sûr, vérifier la formule en développant, ou utiliser le discriminant pour factoriser.

2. Remarquons que le dénominateur est toujours positif, ainsi que le coefficient $\frac{2}{5}$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de $(x-2)(2x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$2x - 1$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\simeq 0{,}177$	$\searrow$	$\simeq -0{,}009$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} - \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{2}{5} - \ln\left(\frac{5}{4}\right) \simeq 0{,}177$$
$$f(2) = \frac{4}{5} \times 2 - \ln(2^2 + 1) = \frac{8}{5} - \ln(5) \simeq -0{,}009$$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{5}x = -\infty$

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc, par composition : } \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

   On en déduit (par somme) : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{5}x - \ln(x^2 + 1) = -\infty}$

4. On admet que le développement limité de f en 0 d'ordre 4 est : $f(x) = \frac{4}{5}x - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^4\varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$.

   Par conséquent : $\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{4}{5}x - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^4\varphi(x)}{x} = \frac{4}{5} - x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varphi(x)$

   on a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$
   $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$
   $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}x^3 = 0$
   et $\lim\limits_{x \to 0} x^3\varphi(x) = 0$

   Par conséquent (par somme) : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{4}{5}}$