Mathématiques - Devoir surveillé n° 1

Exercice 1 (8 points) :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f.
3. Déterminer la valeur exacte du minimum de f, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et compléter le tableau.

Exercice 2 (12 points) :

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{4\,\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1}$$

où t est le temps en jours après le jour de plantation.

PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION f

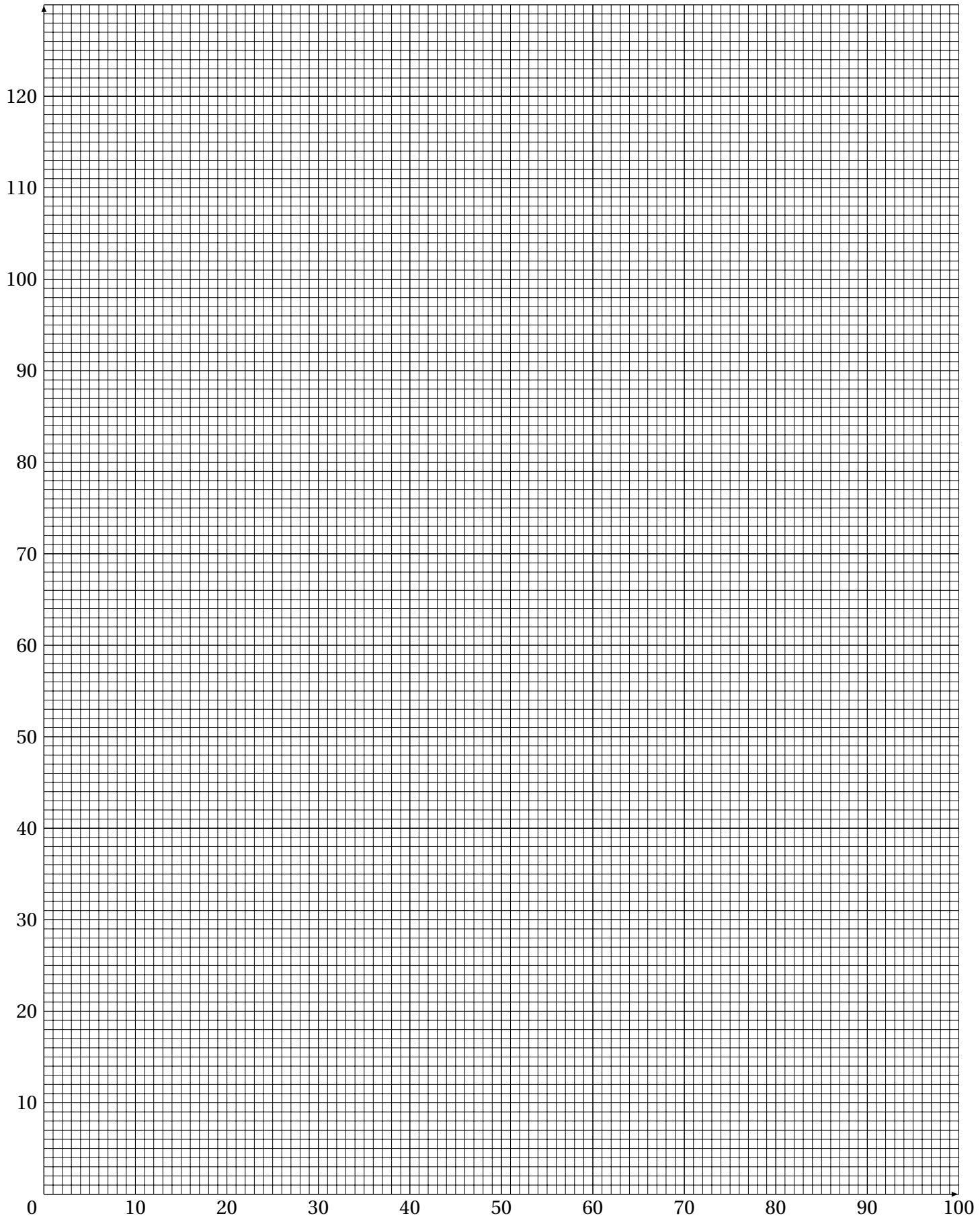
1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$.
2. a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ (on rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08t} = 0$).
   b) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f. Tracer cette asymptote sur le graphique au verso.
   c) Comment cela se traduit-il pour la croissance d'un plant ?
3. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(t) = \dfrac{38{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}08t}}{(4\,\mathrm{e}^{-0{,}08t}+1)^2}$.
4. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
6. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f donné ci-dessous (arrondir à 10^{-1} près).

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(t)$										

7. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique.

PARTIE B : EXPLOITATION

1. Donner une inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 50 cm de haut.
2. Résoudre cette inéquation (*on donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à l'unité du résultat*).
3. Retrouver le résultat de la question 2. en utilisant la courbe représentative de f. (On explicitera la démarche suivie).


120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100