Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 :

1. On pose : $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$; alors : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
   Comme $f = uv$, alors $f' = u'v + uv'$.
   Ainsi : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + \dfrac{x}{x} = \ln(x) + 1$

2. On résout par exemple l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
   $\ln(x) + 1 \geq 0$
   $\ln(x) \geq -1$
   $\mathrm{e}^{\ln(x)} \geq \mathrm{e}^{-1}$ (le sens de l'inégalité ne change pas car la fonction exponentielle est croissante)
   $x \leq \mathrm{e}^{-1}$

   On obtient le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Minimum de f :
   $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \times \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \times (-1) = -\mathrm{e}^{-1} \simeq -0{,}37$

4. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
   Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$

Exercice 2 :

PARTIE A

1. $f(0) = \dfrac{120}{4\,\mathrm{e}^{-0{,}08\times 0} + 1} = \dfrac{120}{4 \times 1 + 1} = \dfrac{120}{5} = 24$
   Le jour où ils sont plantés, les plans mesurent 24 cm.

2.a) On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08t} = 0$ (Rappel de l'énoncé)
   Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} 4\,\mathrm{e}^{-0{,}08t} = 0$
   Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08t} + 1 = 1$
   Donc, par quotient : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{120}{4\,\mathrm{e}^{-0{,}08t} + 1} = 120$

   C'est à dire : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 120$

b) On en déduit que la droite d'équation $y = 120$ est une asymptote à la courbe représentative de f.

c) On peut interpréter ceci de la façon suivante : la hauteur d'un plan va se stabiliser, au bout d'un certain temps, aux alentours de 120 cm.

3. La fonction f se présente comme un quotient.
   Posons : $u(t) = 120$ et $v(t) = 4\,\text{e}^{-0{,}08t} + 1$
   On en déduit : $u'(t) = 0$ et $v'(t) = 4 \times (-0{,}08) \times \text{e}^{-0{,}08t} = -0{,}32\text{e}^{-0{,}08t}$

   On a ici : $f = \dfrac{u}{v}$, donc : $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

   Ainsi : $f'(t) = \dfrac{0 \times \left(4\,\text{e}^{-0{,}08t} + 1\right) - \left(120 \times (-0{,}32\text{e}^{-0{,}08t})\right)}{\left(4\,\text{e}^{-0{,}08t} + 1\right)^2}$

   On simplifie le numérateur : $f'(t) = \dfrac{38{,}4\text{e}^{-0{,}08t}}{\left(4\,\text{e}^{-0{,}08t} + 1\right)^2}$

4. Le signe de f' dépend du signe du numérateur et du signe du dénominateur ; mais le dénominateur est un carré, donc toujours positif.
   Le numérateur est un produit de deux nombres positifs : 38,4 est évidemment positif et $\text{e}^{-0{,}08t}$ est positif parce que c'est une propriété de la fonction exponentielle.

   Le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc f' est positive.

5. On en déduit le tableau de variations de f :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	24	$\nearrow$	120

6. Le tableau :

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(t)$	24	42,90	66,39	88,05	103,18	111,81	116,18	118,25	119,21	119,64

7. Voir plus bas

PARTIE B

1. La hauteur du plan en cm est donnée par $f(t)$. Donc, on résout l'inéquation : $f(t) \geq 50$.

2. On remplace $f(t)$ par son expression :

$$\frac{120}{4\,\mathrm{e}^{-0,08t}+1} \geq 50$$

on se débarrasse du quotient :

$$120 \geq 50 \times \left(4\,\mathrm{e}^{-0,08t}+1\right)$$

On développe :

$$120 \geq 50 \times 4\mathrm{e}^{-0,08t} + 50 \times 1$$

On isole l'exponentielle :

$$120 - 50 \geq 200\mathrm{e}^{-0,08t}$$

$$\frac{70}{200} \geq \mathrm{e}^{-0,08t}$$

On se débarrasse de l'exponentielle en appliquant la fonction logarithme :

$\ln\left(\dfrac{70}{200}\right) \geq \ln\left(\mathrm{e}^{-0,08t}\right)$ (Le sens de l'inégalité est conservé car ln est croissante)

$$\ln\left(\frac{7}{20}\right) \geq -0,08t$$

On isole t :

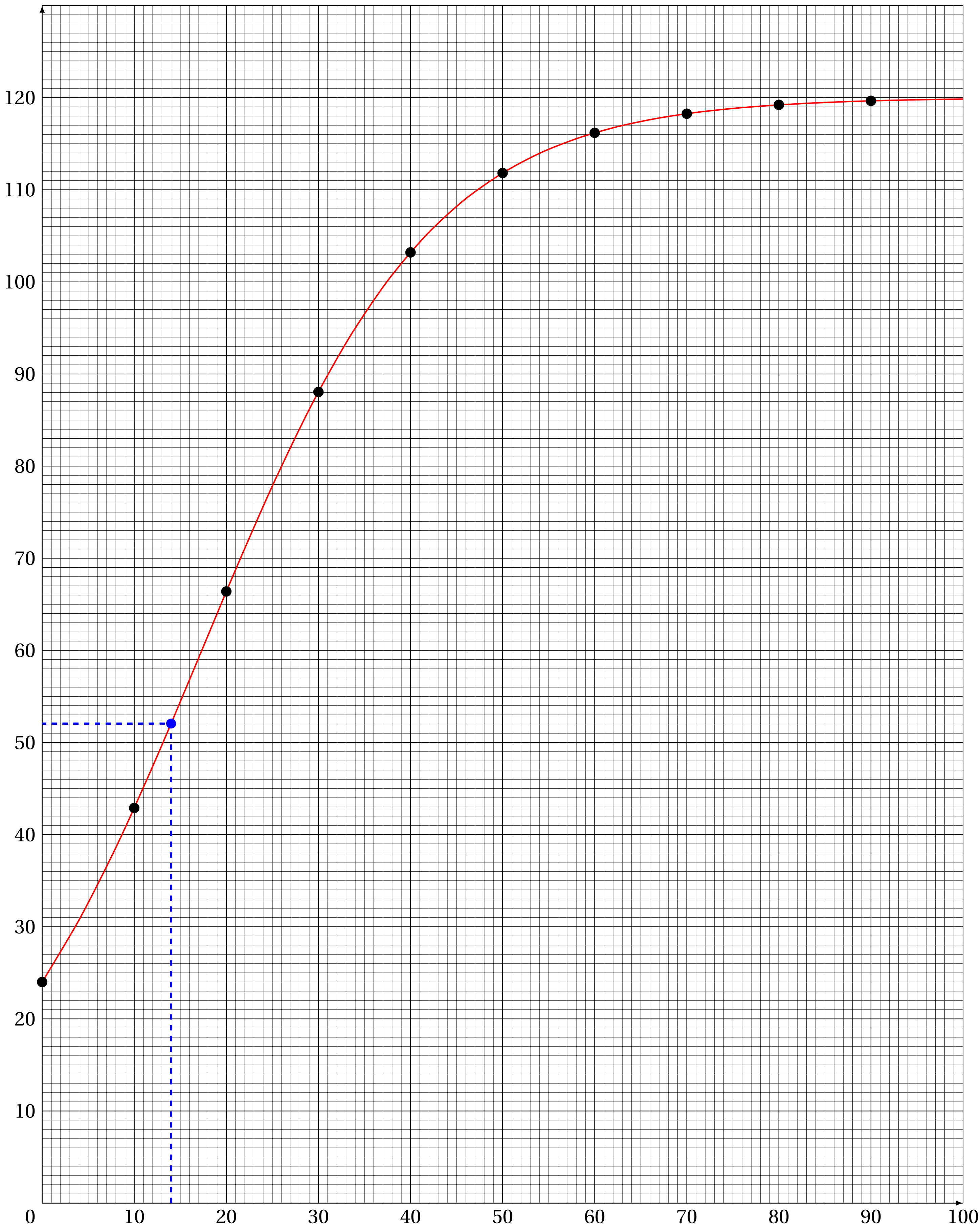
$\dfrac{\ln\left(\dfrac{70}{200}\right)}{-0,08} \leq t$ (On change le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif)

Soit : $t \geq \dfrac{\ln\left(\dfrac{70}{200}\right)}{-0,08}$

On trouve à la calculatrice : $\dfrac{\ln\left(\dfrac{70}{200}\right)}{-0,08} \simeq 13,12$

Ainsi, au bout de 13 jours environ, le plan atteindra presque 50 cm de haut ; il dépassera 50 cm au bout de 14 jours.

3. On cherche sur la courbe où se trouve le premier point dont l'ordonnée est supérieure à 50. On lit son abscisse et on trouve 14 (voir le graphique).


120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100