Mathématiques - Devoir surveillé n°3

STS MS1 - 08.01.2020

Exercice 1 (10 points) :

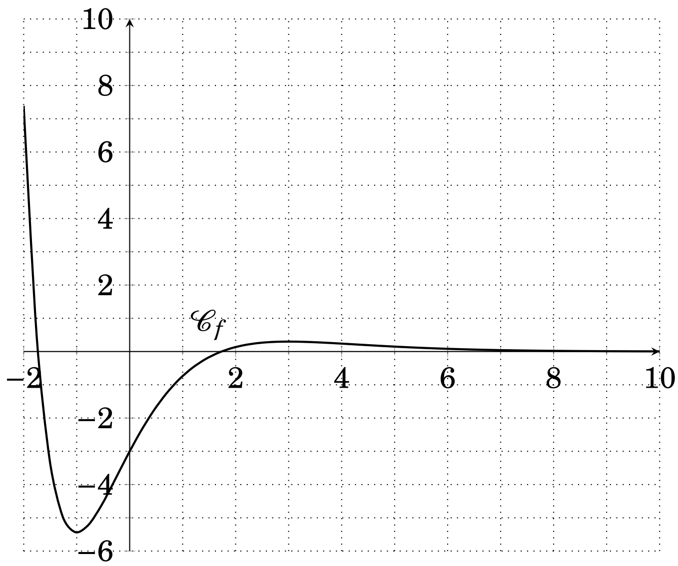
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 6x^3 - 4x + 1 \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{7}{x} \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 \mathrm{e}^{2x+1} \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{4x}{\sqrt{x^2+16}} \, \mathrm{d}x$

Exercice 2 (10 points) :

A. Étude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10[$ par : $f(x) = (x^2-3)\mathrm{e}^{-x}$ On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

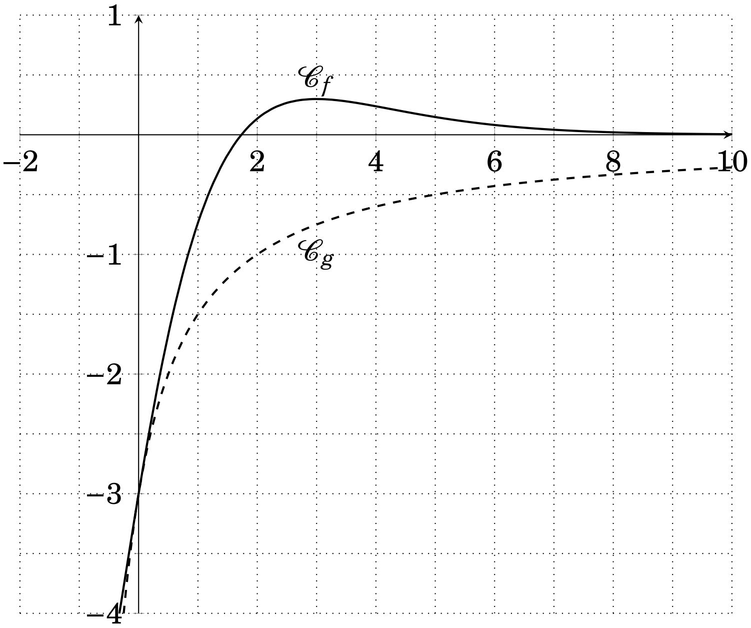


1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de l'intervalle $[-2\ ;\ 10[$: $f'(x) = -(x-3)(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10[$ et donner son tableau de variations. On précisera les valeurs remarquables de x et $f(x)$.

B. Calcul d'aire.

Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 10[$ par $g(x) = -\dfrac{3}{x+1}$. Soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative, dans le même repère que $\mathscr{C}_f$

1. Vérifier que $f(0) = g(0)$.
2. On admet que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$.
   Sur le dessin ci-dessous, hachurer la partie du plan dont l'aire, en unités d'aire, est donnée par l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$.



3. Justifier que la fonction F définie sur $[-2\,;10]$ par : $F(x) = -\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$est une primitive de f.
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^5 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.