Devoir surveillé n°3 - Correction

Exercice 1 :

1. $\displaystyle\int_1^4 6x^3-4x+1\,\mathrm{d}x$
   Posons : $f(x)=6x^3-4x+1$. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x)=\dfrac{6}{4}x^4-\dfrac{4}{2}x^2+x=\dfrac{3}{2}x^4-2x^2+x$
   $F(4)=\dfrac{3}{2}\times 4^4-2\times 4^2+4=356$
   $F(1)=\dfrac{3}{2}\times 1^4-2\times 1^2+1=\dfrac{1}{2}=0{,}5$
   Donc : $\displaystyle\int_1^4 6x^3-4x+1\,\mathrm{d}x=F(4)-F(1)=356-0{,}5=355{,}5$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{7}{x}\,\mathrm{d}x$
   Posons : $f(x)=\dfrac{7}{x}$. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x)=7\ln(x)$
   $F(\mathrm{e})=7\ln(\mathrm{e})=7\times 1=7$
   $F(1)=7\ln(1)=7\times 0=0$
   Donc : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{7}{x}\,\mathrm{d}x=F(\mathrm{e})-F(1)=7$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$
   Posons : $f(x)=\mathrm{e}^{2x+1}$. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}$
   $F(3)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 3+1}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{7}$
   $F(-1)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times(-1)+1}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$
   Donc : $\displaystyle\int_{-1}^3 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x=F(3)-F(-1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{7}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$
   Posons : $f(x)=\cos(2x)$. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)$
   $F(\frac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}\sin(2\times\frac{\pi}{4})=\dfrac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{2}$
   $F(0)=\dfrac{1}{2}\sin(2\times 0)=\dfrac{1}{2}\sin(0)=\dfrac{1}{2}\times 0=0$
   Donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)\,\mathrm{d}x=F(\frac{\pi}{4})-F(0)=\frac{1}{2}=0{,}5$
5. $\displaystyle\int_0^3\frac{4x}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x$
   Posons : $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+16}}$, de la forme $\dfrac{2u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2+16}$
   $F(3)=2\sqrt{3^2+16}=2\sqrt{25}=2\times 5=10$

$F(0) = 2\sqrt{0^2+16} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$

Donc : $\displaystyle\int_0^3 \frac{4x}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 2$

Exercice 2 :

A. Étude d'une fonction.

1. Posons : $u(x) = x^2 - 3$ et donc : $u'(x) = 2x$
   $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et donc $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
   Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + (x^2-3)(-\mathrm{e}^{-x}) = (2x - x^2 + 3)\mathrm{e}^{-x}$
   Or : $-(x-3)(x+1) = -(x^2 - 2x - 3) = -x^2 + 2x + 3$.
   On a bien : $f'(x) = -(x-3)(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$

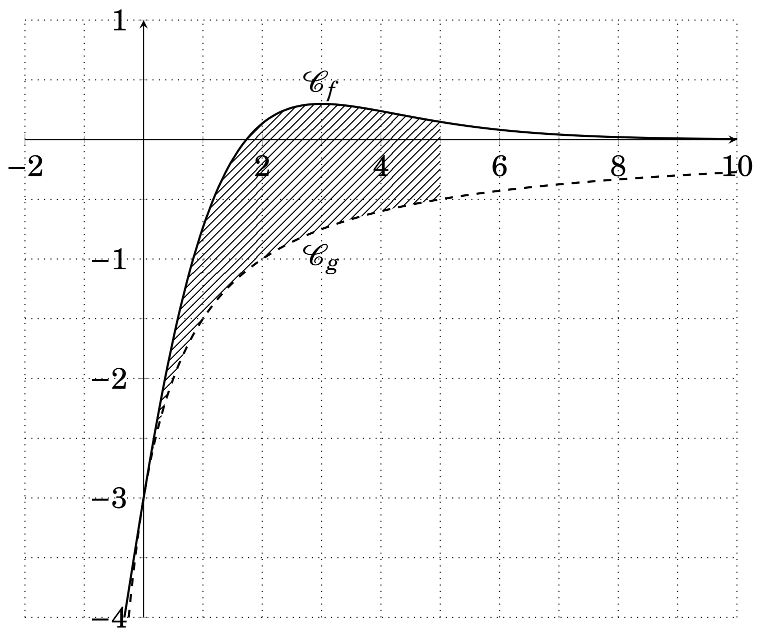
2. Comme e^{-x} est positif, $f'(x)$ a le signe de $-(x-3)(x+1)$

x	-2		-1		3		10
$-(x-3)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$6\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$97\mathrm{e}^{-10}$

B. Calcul d'aire.

1. $f(0) = (0^2 - 3)\mathrm{e}^0 = -3$
   $g(0) = \dfrac{-3}{0+1} = -3$

2. Le dessin :



3. Dérivons F.
   Posons : $u(x) = -(x^2 + 2x - 1)$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$; alors : $u'(x) = -(2x+2)$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

   $F'(x) = u'(x)v(x) + (u(x)v'(x) = -(2x+2)\mathrm{e}^{-x} - (x^2+2x-1)(-\mathrm{e}^{-x)} = (-2x-2+x^2+2x-1)\mathrm{e}^{-x}$
   $F'(x) = (x^2-3)\mathrm{e}^{-x}$

   On a bien : $F'(x) = f(x)$

4. Une primitive de g est la fonction G telle que $G(x) = -3\ln(x+1)$
   $F - G$ est une primitive de $f - g$. On calcule :

   $F(5) - G(5) = -\left(5^2 + 2\times 5 - 1\right)\mathrm{e}^{-5} - (-3)\ln(5+1) = -34\mathrm{e}^{-5} + 3\ln(6)$
   $F(0) - G(0) = -\left(0^2 + 2\times 0 - 1\right)\mathrm{e}^{0} - (-3)\ln(0+1) = 1\mathrm{e}^0 + 3\times 0 = 1$

   $I = \displaystyle\int_0^5 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = -34\mathrm{e}^{-5} + 3\ln(6) - 1$

   Valeur approchée : $I = \displaystyle\int_0^5 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \simeq 4{,}146$