Loi normale - Exercices

Exercice 1 :

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 5.

1. Calculer $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 30)$, $P(12 \leq X \leq 18)$, $P_{X \geq 12}(X \leq 15)$.
2. Déterminer a dans chacun des cas suivants : $P(X \geq a) = 0{,}7$; $P(X \leq a) = 0{,}6$; $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}6$; $P(-a \leq X \leq a) = 0{,}95$.
   Faire à chaque fois un schéma illustrant la situation.

Exercice 2 :

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
3. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Exercice 3 :

Un atelier de mécanique de précision est équipé de machines à commande numérique permettant la production de pièces métalliques en aluminium. Un client passe une commande de pièces dont la longueur souhaitée est de 75 millimètres (mm).

PARTIE A

Le réglage des machines permet de produire des pièces dont la longueur, exprimée en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 75$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}03$.

Afin de garantir au client une précision optimale, seules les pièces dont la longueur est comprise entre 74,95 mm et 75,05 mm sont jugées commercialisables.

1. Déterminer $P(X > 74{,}97)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit commercialisable.

PARTIE B

On souhaite améliorer la précision de la production. Pour cela, les machines sont réglées et reprogrammées. Après réglage, la longueur des pièces, en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi normale. Son espérance est inchangée et vaut $\mu = 75$. La valeur de l'écart-type a été modifiée. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.

Ces nouveaux réglages permettent de limiter la proportion de pièces non commercialisables.

On a $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \approx 0{,}95$ Déterminer σ'. Justifier.

Exercice 4 :

Les téléphones portables intègrent des capteurs photographiques de plus en plus évolués. Ces capteurs sont fragiles et ont une durée de vie limitée.

La durée de fonctionnement sans panne, exprimée en années, d'un capteur photographique est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 1{,}23$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique ?

2. Déterminer la probabilité $P(3{,}5 \leqslant D \leqslant 4{,}5)$.
3. Lors de l'achat d'un téléphone portable, la garantie pièces et main d' œuvre est de deux ans.
   Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie ?

Exercice 5 :

Soit X et Y des variables aléatoires.
X suit la loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0{,}1$ et Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma = 0{,}2$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = -2X + 3$.
2. Déterminer la loi des variables aléatoires $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}2$. En utilisant une approximation de cette loi par une loi normale dont on précisera les paramètres, calculer une valeur approchée de $P(X = 20)$, $P(X \leq 2)$, $P(18 \leq X \leq 22)$ et de $P(X > 18)$.

Exercice 7 :

Dans une revue on peut lire : « On estime à 60,5% le pourcentage de Français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année ». On considère 100 personnes choisies au hasard avec remise dans la population française.

Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis à 0,01.

1. On désigne par X la variable aléatoire mesurant, parmi ces 100 personnes, le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.
   a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   b) Calculer l'espérance et l'écart type de X.
   c) Calculer $P(X = 45)$.
2. On décide d'approcher cette loi par la loi normale $N(39{,}5; 4{,}89)$. Soit Y la variable aléatoire suivant cette loi.
   a) Calculer une valeur approché de l'événement « 45 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c-a-d calculer $P(44{,}5 \leq Y \leq 45{,}5)$.
   b) Calculer une valeur approché de l'événement « au plus 30 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c-a-d calculer $P(Y \leq 30{,}5)$.

Exercice 8 :

Une étude statistique a permis d'estimer que la probabilité qu'une machine choisie au hasard dans une certaine population soit victime d'un dysfonctionnement (tombe en panne) est 0,45.

On observe 100 machines choisies au hasard. On suppose que ces machines tombent en panne indépendamment les unes des autres. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de machines victimes d'un dysfonctionnement parmi les individus choisis.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche de l'écart-type de X.
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale.
   Quels sont les paramètres de cette loi ?
   Utiliser cette approximation pour répondre aux questions suivantes de façon approchée.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 50 des 100 machines choisies tombent en panne.
5. Calculer la probabilité que le nombre de machines victimes d'un dysfonctionnement soit compris entre 30 et 60, c'est à dire $P(30 \leq X \leq 60)$.