Loi normale - Exercices

Exercice 1 :

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 20 et d'écart-type 5.

1. Calculer $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 30)$, $P(12 \leq X \leq 18)$, $P_{X \geq 12}(X \leq 15)$.
2. Déterminer a dans chacun des cas suivants : $P(X \geq a) = 0{,}7$; $P(X \leq a) = 0{,}6$; $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0{,}6$; $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0{,}95$.
   Faire à chaque fois un schéma illustrant la situation.

Corrigé :

1) • $P(X \leq 15)$ se trouve à la calculatrice, comme expliqué dans la vidéo.

Par exemple, pour les TI, taper "NormalFrep".

Attention surtout à l'ordre des paramètres.

On trouve : $P(X \leq 15) \simeq 0{,}159$

On peut visualiser le calcul grâce à geogebra, par exemple en ligne :

https://www.geogebra.org/classic#probability

Entrer les valeurs de μ et σ, et vérifier que la distribution est bien du type « Normale » (case plus bas).

Les cases en bas à gauche permettent de sélectionner $P(X \leq a$, $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \geq a)$.

• $P(X \geq 30) \simeq 0{,}023$

• $P(12 \leq X \leq 18) \simeq 0{,}290$

• D'après la définition : $P_{X \geq 12}(X \leq 15) = \dfrac{P(X \geq 12 et X \leq 15)}{P(X \geq 12} = \dfrac{P(12 \leq X \leq 15)}{P(X \geq 12}$

$P(12 \leq X \leq 15) \simeq 0{,}103856$

$P(X \geq 12) \simeq 0{,}945201$

Donc : $P_{X \geq 12}(X \leq 15) \simeq 0{,}110$

2)• Si $P(X \geq a) = 0{,}7$ alors $P(X \leq a) = 0{,}3$. En effet, la calculatrice ne sait donner une valeur approchée de a que si on lui donne la valeur de $P(X \leq a)$ (probabilité d'avoir des valeurs **plus petites** que a).

On utilise FraqNormale ou InvNormale, comme expliqué.

On trouve $a \simeq 17{,}4$

On peut facilement vérifier grâce à l'application geogebra.

• $P(X \leq a) = 0{,}6$ On trouve $a \simeq 21{,}3$

• Il faut modifier l'énoncé (désolé, j'avais oublié de rectifier) : $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0{,}6$ L'intervalle doit être symétrique autour de μ.

On sait que $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0{,}683$.

Ici, 0,6 étant un peu plus petit que 0,683, on voit que a va être un peu plus petit que σ. On va trouver une valeur approchée de a par essais successifs.

Essayons avec $a \simeq 4{,}5$ par exemple.

On teste : $P(15{,}5 \leq X \leq 24{,}5) \simeq 0{,}631$. Encore un peu grand. On raccourcit légèrement l'intervalle.

Essayons avec $a \simeq 4$.

On teste : $P(156 \leq X \leq 24) \simeq 0{,}576$. Trop petit. On rallonge légèrement l'intervalle.

Essayons avec $a \simeq 4{,}3$.

On teste : $P(15{,}7 \leq X \leq 24{,}3) \simeq 0{,}610$. Un peu grand, mais presque bon. On raccourcit très légèrement l'intervalle.

Essayons avec $a \simeq 4{,}25$.

On teste : $P(15{,}75 \leq X \leq 24{,}25) \simeq 0{,}604$. Pas mal. On peut s'arrêter là.

Une meilleure valeur approchée est $a \simeq 4{,}21$

- $P(20 - a \leq X \leq 20 + a) = 0{,}95$. On sait d'après le cours que $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}954$

Donc ici, a est très voisin de $2\sigma = 10$.

Par essais successifs, on trouve $a \simeq 9{,}8$

Exercice 2 :

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
3. De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52% de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Corrigé :

1. La taille d'une femme est modélisée par la v.a. X_1, qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm.
   On convertit en cm et on cherche alors $P(153 \leq X_1 \leq 177)$.
   On trouve grâce à la calculatrice : $P(153 \leq X_1 \leq 177) \simeq 0{,}954$. Logique car $153 = \mu_1 - 2\sigma_1$ et $177 = \mu_1 + 2\sigma_1$.

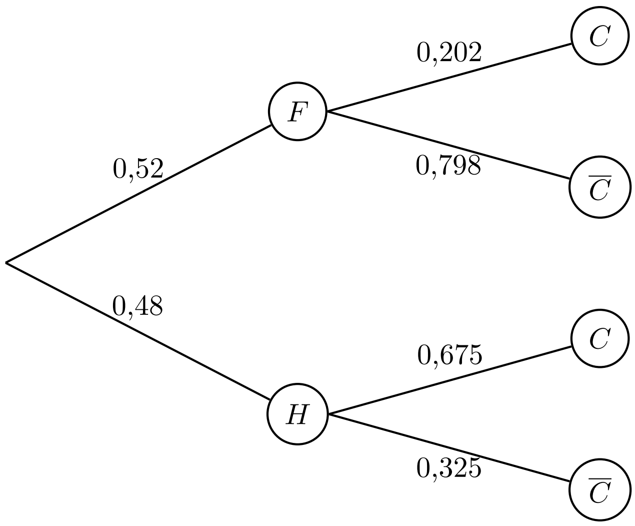
2. On cherche ici $P(X_2 \geq 170)$ (même raisonnement).
   On trouve grâce à la calculatrice : $P(X_2 \geq 170) \simeq 0{,}675$.

3. Il y a manifestement une histoire de probabilité conditionnelle.
   Soit F l'événement : « La personne choisie est une femme »
   H : « La personne choisie est un homme »
   et C : « La personne choisie mesure plus de 1,70 m ».
   Pour pouvoir compléter l'arbre, il nous faudrait la probabilité qu'une personne mesure plus de 1,70 m sachant que c'est une femme, puis la probabilité qu'une personne mesure plus de 1,70 m sachant que c'est un homme.

   La probabilité qu'une personne mesure plus de 1,70 m sachant que c'est une femme se calcule facilement : c'est $P(X_1 \geq 170)$.
   On trouve à la calculatrice : $P(X_1 \geq 170) \simeq 0{,}202$.

La probabilité qu'une personne mesure plus de 1,70 m sachant que c'est un homme se calcule aussi bien : c'est $P(X_2 \geq 170)$.
On a déjà calculé cette probabilité : $P(X_1 \geq 170) \simeq 0{,}675$.

Bien. On peut faire un arbre :



D'après le principe des probabilités totales : $P(C) = P(F \cap C) + P(G \cap C)$
$P(C) = 0{,}52 \times 0.202 + 0{,}48 \times 0{,}675 = 0{,}42904$
D'autre part : $P(F \cap C) = 0{,}52 \times 0{,}202 = 0{,}10504$

Alors $P_F(C) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C) = \dfrac{0{,}10504}{0{,}42904}} \simeq 0{,}245$

Ainsi, la probabilité qu'une personne soit une femme sachant qu'elle mesure plus d'1 m 70 est de 0,245 environ.

Exercice 3 :

Un atelier de mécanique de précision est équipé de machines à commande numérique permettant la production de pièces métalliques en aluminium. Un client passe une commande de pièces dont la longueur souhaitée est de 75 millimètres (mm).

PARTIE A

Le réglage des machines permet de produire des pièces dont la longueur, exprimée en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 75$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}03$.

Afin de garantir au client une précision optimale, seules les pièces dont la longueur est comprise entre 74,95 mm et 75,05 mm sont jugées commercialisables.

1. Déterminer $P(X > 74{,}97)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit commercialisable.

PARTIE B

On souhaite améliorer la précision de la production. Pour cela, les machines sont réglées et reprogrammées. Après réglage, la longueur des pièces, en millimètre, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi normale. Son espérance est inchangée et vaut $\mu = 75$. La valeur de l'écart-type a été modifiée. On note σ' la nouvelle valeur de l'écart-type.

Ces nouveaux réglages permettent de limiter la proportion de pièces non commercialisables.

On a $P(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05) \approx 0{,}95$.

Déterminer σ'. Justifier.

Corrigé :

Partie A :

1. On utilise la calculatrice, pour obtenir : $P(X > 74{,}97) \simeq 0.841$.
2. Pour qu'une pièce soit commercialisable, il faut que sa longueur soit comprise entre 74,95 mm et 75,05 mm.
   On calcule donc $P(74{,}95 \leq X \leq 75{,}05)$ et on trouve (calculatrice) : $P(74{,}95 \leq X \leq 75{,}05) \simeq 0{,}904$

Partie B :

On sait que : $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}95$.

Première méthode :

On peut réécrire ce qui précède sous la forme : $P\left(75 - 0{,}05 \leqslant Y \leqslant 75 + 0{,}05\right) \simeq 0{,}95$.

On sait, d'après le cours, que : $P(Y \in [\mu - 2\sigma' \,;\, \mu + 2\sigma']) \simeq 0{,}954$.

Comme 0,95 est proche de 0,954, on peut estimer que $2\sigma' \simeq 0{,}05$, soit $\sigma' \simeq 0{,}025$.

0,954, c'est quand même un peu trop grand, donc notre σ' est un peu petit (la courbe de densité de probabilité est un peu trop « serrée »). On peut affiner la valeur de σ' par essais successifs, en partant de 0,025 et en augmentant un peu.

On trouve :

pour $\sigma' = 0{,}0251$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9536$.

pour $\sigma' = 0{,}0252$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9528$.

pour $\sigma' = 0{,}0253$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9519$.

pour $\sigma' = 0{,}0254$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9510$.

pour $\sigma' = 0{,}0255$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9501$. Pas mal.

pour $\sigma' = 0{,}0256$, $P\left(74{,}95 \leqslant Y \leqslant 75{,}05\right) \simeq 0{,}9491$. Moins bien.

Ainsi, on a plus précisément : $\sigma' \simeq 0{,}0255$

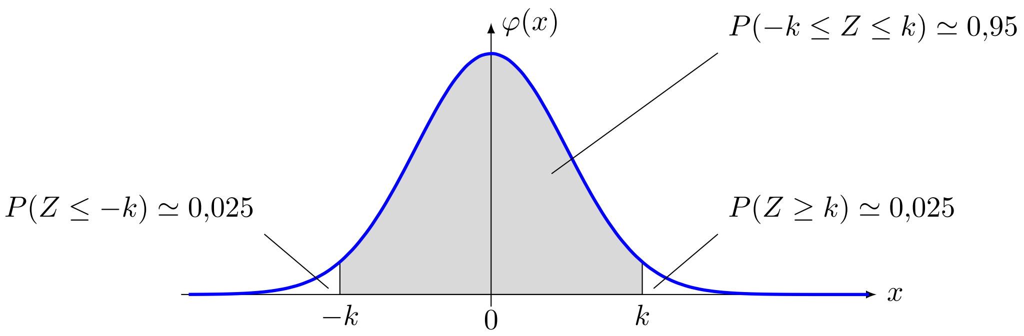
Seconde méthode :

On voudrait parvenir plus rapidement à une bonne valeur approchée. Pour cela, on va utiliser la propriété du cours :

Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, $P(X \in [\mu - k\sigma ; \mu + k\sigma])$ est un nombre indépendant de μ et σ.

Prenons pour simplifier : $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. Si Z suit la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$, on a : $P(Z \in [-k\,;+k]) = P(Y \in [75 - k\sigma' ; 75 + k\sigma'])$.

Bon, un petit dessin :



La probabilité que Z appartienne à l'intervalle $[-k; +k]$ est de 0,95 ; donc la probabilité que Z n'appartienne pas à cet intervalle est de 0,05. (Rappel : l'aire totale sous la courbe est 1).

Comme la courbe de densité est symétrique, les deux bouts qui restent représentent la même probabilité, donc la moitié de 0,05.

Autrement dit : $P(Z \leq -k) \simeq 0{,}025$ et $P(Z \geq k) \simeq 0{,}025$

La probabilité $P(Z \leq k)$ vaut donc : $0{,}025 + 0{,}95 = 0{,}975$.

On peut à présent utiliser la calculatrice (fonction `fraqNormale` ou `invNormale`, ou équivalent).

On obtient $k \simeq 1{,}96$, et donc : $P(Z \in [-1{,}96\,;+1{,}96]) \simeq 0{,}95$.

Par conséquent, on a aussi : $P(Y \in [75 - 1{,}96\sigma'; 75 + 1{,}96\sigma']) \simeq 0{,}95 \simeq P\,(75 - 0{,}05 \leqslant Y \leqslant 75 + 0{,}05)$

Ainsi : $1{,}96\sigma' = 0{,}05$, ce qui donne $\sigma' \simeq \dfrac{0{,}05}{1{,}96} \simeq 0{,}255$

Exercice 4 :

Les téléphones portables intègrent des capteurs photographiques de plus en plus évolués. Ces capteurs sont fragiles et ont une durée de vie limitée.

La durée de fonctionnement sans panne, exprimée en années, d'un capteur photographique est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 1{,}23$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique ?
2. Déterminer la probabilité $P(3{,}5 \leqslant D \leqslant 4{,}5)$.
3. Lors de l'achat d'un téléphone portable, la garantie pièces et main d' œuvre est de deux ans.
   Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie ?

Corrigé :

1. La durée moyenne de fonctionnement sans panne est égale à l'espérance de D (espérance = moyenne). C'est le paramètre μ (rappel : σ, c'est l'écart-type). Donc la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique est de 4 ans.
2. À la calculatrice : $P(3{,}5 \leqslant D \leqslant 4{,}5) \simeq 0{,}3156$
3. La probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie se note $P(D \leq 2)$.
   À la calculatrice : $P(D \leq 2) \simeq 0{,}0520$

Exercice 5 :

Soit X et Y des variables aléatoires.
X suit la loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0{,}1$ et Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma = 0{,}2$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = -2X + 3$.
2. Déterminer la loi des variables aléatoires $U = X - Y$ et $V = X + Y$.

Corrigé :

On utilise le paragraphe 3 du cours : opérations sur les variables aléatoires.

1. Si X suit la loi normale d'espérance μ_1 et d'écart-type σ_1, alors :
   pour a, $b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX + b$ suit la loi normale d'espérance $a\mu_1 + b$ et d'écart-type $|a|\sigma_1$.
   Ici : X suit la loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0{,}1$.
   $Z = -2X + 3$.
   Donc Z suit la loi normale de paramètres $\mu = -2 \times 2 + 3 = -1$ et d'écart-type $2 \times 0{,}1 = 0{,}2$.

2. Si X suit la loi normale d'espérance μ_1 et d'écart-type σ_1 et si Y suit la loi normale d'espérance μ_2 et d'écart-type σ_2, alors pour a, $b \in \mathbb{R}$, la v.a.aléatoire $U = X - Y$ suit la loi normale d'espérance $\mu_1 - \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
   Ici, U suit donc la loi normale d'espérance $2 - 3 = -1$ et d'écart-type $\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}05} \simeq 0{,}224$.

   Si X suit la loi normale d'espérance μ_1 et d'écart-type σ_1 et si Y suit la loi normale d'espérance μ_2 et d'écart-type σ_2, alors pour a, $b \in \mathbb{R}$, la v.a.aléatoire $V = X + Y$ suit la loi normale d'espérance $\mu_1 + \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
   Ici, V suit donc la loi normale d'espérance $2 + 3 = 5$ et d'écart-type $\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}2^2} = \sqrt{0{,}05} \simeq 0{,}224$.

Exercice 6 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}2$. En utilisant une approximation de cette loi par une loi normale dont on précisera les paramètres, calculer une valeur approchée de $P(X = 20)$, $P(X \leq 2)$, $P(18 \leq X \leq 22)$ et de $P(X > 18)$.

Corrigé :

D'après le cours (paragraphe 2.5), on peut approcher une loi binomiale par une loi normale de même espérance et de même écart-type.

Calculons $E(X)$ et $\sigma(X)$.

$E(X) = np = 100 \times 0{,}2 = 20$

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = \sqrt{16} = 4$

Ainsi, on peut approcher la loi de X par une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et $\sigma = 4$.

Rappelons la propriété 4 :

Si X suit la loi binomiale de paramètres $(n\,;p)$, $P(r \leq X \leq s) \simeq P(r - 0{,}5 \leq Y \leq s + 0{,}5)$, où Y suit la loi normale de même espérance et de même écart-type que X.

Soit donc Y une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 20$ et $\sigma = 4$. On a donc :

$P(X = 20) \simeq P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5)$

On trouve à la calculatrice : $P(19{,}5 \leq Y \leq 20{,}5) \simeq 0{,}0995$ donc $P(X = 20) \simeq 0{,}0995$.

De la même façon :

$P(X \leq 2) = P(0 \leq X \leq 2) \simeq P(-0{,}5 \leq Y \leq 2{,}5) \simeq 5{,}922 \times 10^{-6} \simeq 0$

$P(18 \leq X \leq 22) \simeq P(17{,}5 \leq Y \leq 22{,}5) \simeq 0{,}4680$

$P(X > 18) = P(X \geq 19) = P(19 \leq X \leq 100) \simeq P(18{,}5 \leq Y \leq 100{,}5) \simeq 0.6462$

Attention : dans le dernier cas, il faut bien se rappeler que X prend des valeurs entières : les nombres 0, 1, 2, 3, ... , 99, 100.

Donc dire que X est strictement supérieur à 18 revient à dire que X est supérieur ou égal à 19. Et 100 est la dernière valeur prise (d'après la définition d'une loi binomiale).

Exercice 7 :

Dans une revue on peut lire : « On estime à 60,5% le pourcentage de Français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année ». On considère 100 personnes choisies au hasard avec remise dans la population française.

Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis à 0,01.

1. On désigne par X la variable aléatoire mesurant, parmi ces 100 personnes, le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.
   a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   b) Calculer l'espérance et l'écart type de X.
   c) Calculer $P(X = 45)$.
2. On décide d'approcher cette loi par la loi normale $N(39{,}5; 4{,}89)$. Soit Y la variable aléatoire suivant cette loi.
   a) Calculer une valeur approché de l'événement « 45 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c-a-d calculer $P(44{,}5 \leq Y \leq 45{,}5)$.
   b) Calculer une valeur approché de l'événement « au plus 30 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année », c-à-d calculer $P(Y \leq 30{,}5)$.

Corrigé :

1.a) Le choix d'une personne est une expérience à deux issues.

La probabilité p que cette personne ne parte pas en vacance est : $1 - 60{,}5\% = 39{,}5\%$.

Le choix de 100 personnes au hasard et avec remise est la répétition de 100 expériences identiques et indépendantes du type précédent.

La variable aléatoire X compte le nombre de « succès » parmi les 100 résultats ; X suit donc une loi binomiale de paramètres : $n = 100$ et $p = 39{,}5\%$.

b) $E(X) = n \times p = 100 \times 39{,}5\% = 39{,}5$ $\qquad$ $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} \simeq 4{,}889$

c) À la calculatrice : $P(X = 45) \simeq 0{,}0428$ (BinomFdp ou équivalent Casio.)

2.a) À la calculatrice : $P(44{,}5 \leq Y \leq 45{,}5) \simeq 0{,}0433$ (normalFrep ou équivalent Casio.)

b) À la calculatrice : $P(Y \leq 30{,}5) \simeq 0{,}0328$.

NB : En bonne logique, on aurait dû calculer $P(-0{,}5 \leq Y \leq 30{,}5)$, car « au plus 30 personnes » signifie « entre 0 et 30 personnes ». Mais la différence entre $P(-0{,}5 \leq Y \leq 30{,}5)$ et $P(Y \leq 30{,}5)$ est négligeable (de l'ordre de 10^{-16}). En pratique, on pourra toujours faire cette approximation, car 0 est à plus de 4 ou 5 écarts-type de l'espérance.

Exercice 8 :

Une étude statistique a permis d'estimer que la probabilité qu'une machine choisie au hasard dans une certaine population soit victime d'un dysfonctionnement (tombe en panne) est 0,45.

On observe 100 machines choisies au hasard. On suppose que ces machines tombent en panne indépendamment les unes des autres. Soit X la variable aléatoire mesurant le nombre de machines victimes d'un dysfonctionnement parmi les individus choisis.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer l'espérance mathématique de X, puis la valeur arrondie à l'entier le plus proche de l'écart-type de X.
3. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète X par une loi normale.
   Quels sont les paramètres de cette loi ?
   Utiliser cette approximation pour répondre aux questions suivantes de façon approchée.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 50 des 100 machines choisies tombent en panne.
5. Calculer la probabilité que le nombre de machines victimes d'un dysfonctionnement soit compris entre 30 et 60, c'est à dire $P(30 \leq X \leq 60)$.

Corrigé :

1. L'observation d'une machine est une expérience aléatoire à deux issues : la machine est victime d'un dysfonctionnement ou pas.

   La probabilité qu'une machine soit victime de dysfonctionnement est $p = 0{,}45$.

   On observe 100 machines qui tombent en panne indépendamment les unes des autres. On répète donc l'expérience précédente de façon indépendante.

   Donc, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres : $n = 100$ et $p = 0{,}45$.

2. $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}45 = 45$ $\qquad$ $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)} \simeq 4{,}975 \simeq 5$

3. On peut approcher la loi de X par une loi normale de même espérance et de même écart-type.

   D'après la question précédente, on peut prendre : $\mu = 45$ et $\sigma = 5$.

   Soit Y, une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 45 et d'écart-type 5.

4. La probabilité qu'au moins 50 des 100 machines choisies tombent en panne est $P(X \geq 50)$.

   D'après la question précédente : $P(X \geq 50) \simeq P(Y \geq 49{,}5) \simeq 0{,}1841$.

   Si on calcule $P(49{,}5 \leq Y \leq 100{,}5)$, on trouve la même chose...

   La probabilité qu'au moins 50 des 100 machines choisies tombent en panne est donc environ 0,1841.

5. $P(30 \leq X \leq 60) \simeq P(29{,}5 \leq Y \leq 60{,}5) \simeq 0{,}9981$.