Probabilités II - Exercices

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3{,}5$.

1. Calculer $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer $P(X \leq 4)$ et $P(X \geq 5)$.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 2 :

Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

1. Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart- type correspondant.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 ou 4 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

Exercice 3 :

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

Par exemple, la colonne 4 indique que le nombre de journées où il s'est produit 2 accidents est de 22.

1. Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ?
2. Soit X la v.a. donnant le nombre d'accident par jour. On considère que X suit une loi de Poisson. Quel est le paramètre de la loi de X ?
3. Donner les valeurs de $P(X = k)$ (dans un tableau) de $k = 0$ à $k = 5$ et comparer avec les fréquences observées.
4. Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la réalité.

Exercice 4 :

Une usine fabrique en série des pompes de surface destinées à l'irrigation agricole. Une étude statistique permet d'estimer que 1% des pompes fabriquées présentent un défaut mécanique. Les pompes sont conditionnées par caisses de cinquante.

On considère, pour l'étude, que la constitution d'une caisse peut être assimilée à un prélèvement au hasard et avec remise de cinquante pompes dans la production, très importante, de l'usine. On note X la variable aléatoire qui, à chaque caisse de cinquante pompes, associe le nombre de pompes présentant un défaut mécanique.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne une pompe présentant un défaut mécanique.
   b) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes présentant un défaut mécanique.
3. On décide d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.
   a) Quelle valeur du paramètre λ choisit-on ? Justifier.

b) On note Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'une caisse contienne au moins quatre pompes présentant un défaut mécanique. Arrondir le résultat au millième.

Exercice 5 :

Une coopérative est spécialisée dans la récolte de la fleur de sel. Elle utilise une machine automatique pour remplir des sachets de fleur de sel dont la masse théorique doit être de 250 grammes. La probabilité qu'un sachet ne soit pas conforme est $p = 0{,}06$.

La coopérative constitue des lots de 50 sachets pour la vente et étudie le nombre de sachets non conformes contenus dans un lot. La production de la coopérative est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler la constitution d'un lot à un tirage au hasard et avec remise de 50 sachets.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 50 sachets le nombre de sachets non conformes de ce lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Que représente la probabilité $P(X = 1)$ dans le contexte de l'exercice ? Calculer $P(X = 1)$.
3. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.
   a) Justifier que cette loi de Poisson a pour paramètre $\lambda = 3$.
   b) On note Y une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
   En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'il y ait au plus cinq sachets non conformes dans un lot de 50 sachets.

Exercice 6 :

Une entreprise de logistique observe qu'en moyenne il arrive chaque jour 4 camions pour le déchargement. Son entrepôt dispose de 5 quais de déchargement. On admet que les arrivées des camions sont indépendantes les unes des autres.

Soit X la variable aléatoire qui à un jour donné associe le nombre de camions arrivant pour décharger. On admet que X suit une loi de Poisson.

On considère que lorsqu'un camion arrive, il lui faut une journée pour décharger.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné, aucun camion n'attende pour décharger ?
2. L'entreprise souhaite augmenter le nombre de quais de déchargement. Combien doit-elle en construire pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?
3. On prévoit un doublement de la fréquence d'arrivée des camions. Combien l'entreprise doit-elle alors construire de quais pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?

Exercice 7 :

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Calculer $P(3 \leq X \leq 7)$.
2. Calculer $P_{X\geq 3}(X \leq 5)$.
3. Déterminer θ tel que $P(X > \theta) = 0{,}8$.
4. Déterminer T tel que $P(X \leq T) = \dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 8 :

Un laboratoire utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au responsable du laboratoire qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Exercice 9 :

Un laborantin dispose d'un stock de pipettes jaugées. Une pipette est considérée conforme au cahier des charges si son volume est compris entre 24,95 et 25,05 ml.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute pipette prise au hasard dans le stock, associe son volume en ml. Le fabricant affirme que Y suit la loi normale d'espérance 25 et d'écart type 0,03.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme au cahier des charges, selon les affirmations du fabricant.

On s'intéresse à présent aux défaillances d'une machine qui fabrique les pipettes. Lorsqu'une révision complète de cette machine a été effectuée, la durée de fonctionnement (en jours) avant une défaillance est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

2. Déterminer la probabilité $P(X \leqslant 200)$ à 10^{-4} près. Quelle interprétation peut-on donner de cette probabilité ?
3. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que la machine ait une défaillance au-delà de 300 jours après une révision complète.
4. Un arrêt pour entretien doit intervenir systématiquement lorsque la probabilité que la machine soit défaillante est égale à 0,5.
   Au bout de combien de jours faut-il prévoir l'arrêt pour l'entretien de cette machine ?

Exercice 10 :

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, on teste le fonctionnement d'une machine à embouteiller de l'eau. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production, associe le volume d'eau en litres qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1{,}5$ et d'écart type $\sigma = 0{,}01$.

On arrondira les probabilités au centième.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $P(X \leqslant 1{,}49)$.

Une bouteille d'eau est conforme lorsqu'elle contient entre 1,48 et 1,52 litre d'eau.

2. On prélève au hasard une bouteille d'eau de la production.
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que cette bouteille d'eau soit conforme aux normes de l'entreprise,
   b) Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calculatrice ?

On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard parmi les machines sur le point d'être livrées, associe sa durée de vie en jours avant une défaillance. On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = -0{,}005$.

3. Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne plus de 200 jours sans défaillance.

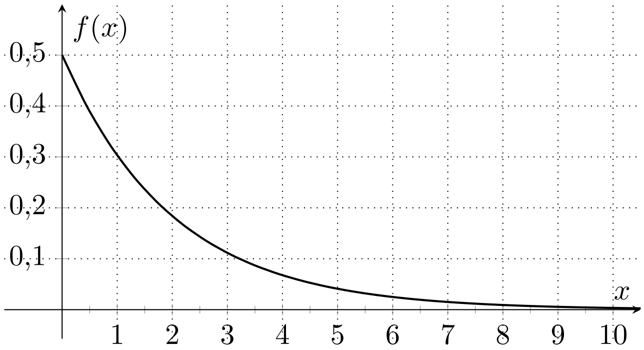
4. Déterminer le réel t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne moins de t jours sans défaillance soit égale à 0,2. Arrondir à l'unité.

Exercice 11 :

Partie A

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée ci-dessous.



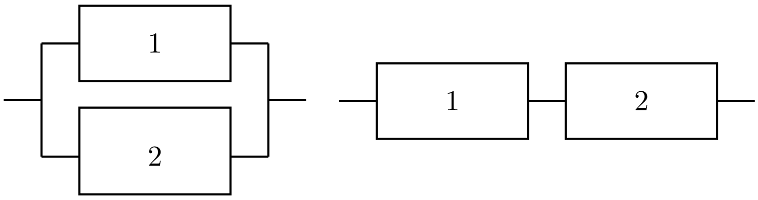
1. Sur le graphique :
   a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   b) Calculer la valeur de λ.
   c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
   d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie B

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A   Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.