Probabilités II - Correction des exercices

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3{,}5$.

1. Calculer $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer $P(X \leq 4)$ et $P(X \geq 5)$.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Corrigé :

1. On utilise la calculatrice, comme expliqué dans le cours.
   Pour $P(X = 0)$, on tape `poissonFdp(3.5,0)` sur TI, `POISN Ppd` sur Casio.
   On trouve $P(X = 0) \simeq 0{,}0302$

   On applique la même méthode pour trouver :
   $P(X = 1) \simeq 0{,}1057$
   $P(X = 2) \simeq 0{,}185$
   $P(X = 3) \simeq 0{,}2158$
   $P(X = 4) \simeq 0{,}1888$

2. Comme x ne prend que des valeurs entières, on a :
   $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
   On fait donc la somme des probabilités déjà calculées, on trouve : $P(X \leq 4) \simeq 0{,}7254$

   Pour $P(X \geq 5)$, il y a a priori une infinité de termes à calculer. Impossible. La solution est de passer par l'événement contraire.
   Comme x ne prend que des valeurs entières, on a :
   $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$.
   On a déjà calculé $P(X \leq 4)$. On trouve donc $P(X \geq 5) \simeq 1 - 0{,}7254$ soit $P(X \geq 5) \simeq 0{,}2746$

3. C'est du cours. On sait que $E(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.
   Donc ici : $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) = \sqrt{3{,}5} \simeq 1{,}871$.

Exercice 2 :

Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

1. Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart- type correspondant.
2. Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 ou 4 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

Corrigé :

1. La moyenne, c'est l'espérance. C'est toujours comme ça en probabilités.
   On a d'après le cours : $E(X) = \lambda$ soit $E(X) = 3{,}87$.
   De même, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$, soit $\sigma(X) = \sqrt{3{,}87} \simeq 1{,}967$.

2. D'après l'énoncé, la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes est $P(X = 0)$.
   On utilise la calculatrice, et on trouve : $P(X = 0) \simeq 0{,}0209$.

3. La probabilité cherchée est $P(X=3)+P(X=4) \simeq 0{,}2015+0{,}1949=0{,}3964$

Exercice 3 :

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

Par exemple, la colonne 4 indique que le nombre de journées où il s'est produit 2 accidents est de 22.

1. Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ?
2. Soit X la v.a. donnant le nombre d'accident par jour. On considère que X suit une loi de Poisson. Quel est le paramètre de la loi de X ?
3. Donner les valeurs de $P(X=k)$ (dans un tableau) de $k=0$ à $k=5$ et comparer avec les fréquences observées.
4. Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la réalité.

Corrigé :

1. On calcule la moyenne pondérée à partir du tableau (aucune subtilité ici) :
$$m=\frac{86\times 0+82\times 1+22\times 2+7\times 3+2\times 4+1\times 5}{86+82+22+7+2+1}=\frac{160}{200}=0{,}8$$
2. La moyenne calculée à la question précédente correspond à l'espérance de X (la moyenne, c'est l'espérance...)
Ainsi, $E(X)=0{,}8$. Or, d'après le cours : $E(X)=\lambda$.
Le paramètre de la loi de X est donc : $\lambda=0{,}8$.
3. On complète le tableau :

Nombre d'accidents : k	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1
Fréquence	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005
$P(X=k)$	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012

Rappelons que la fréquence d'une valeur est le quotient : $\dfrac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total}}$.

On calcule les probabilités à la calculatrice, comme d'habitude.

4. D'abord, calculons la probabilité qu'il se produise moins de 3 accidents un jour donné. C'est $P(X\leq 3)$.

On a : $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\simeq 0{,}9909$.

Assimilant la probabilité à une fréquence théorique, on peut dire que dans ce modèle :

$\dfrac{\text{nombre de jour connaissant moins de 3 accidents}}{\text{nombre total de jours}}\simeq 0{,}9909.$

Sur 200 jours, on aura donc en théorie : $0{,}9909\times 200\simeq 198$ jours connaissant moins de 3 accidents.

Or d'après le tableau, le nombre réel de jours pour lesquels il y a moins de 3 accidents est : 86+82+22+7=197.

Le modèle est donc assez proche de la réalité.

Exercice 4 :

Une usine fabrique en série des pompes de surface destinées à l'irrigation agricole. Une étude statistique permet d'estimer que 1% des pompes fabriquées présentent un défaut mécanique. Les pompes sont conditionnées par caisses de cinquante.

On considère, pour l'étude, que la constitution d'une caisse peut être assimilée à un prélèvement au hasard et avec remise de cinquante pompes dans la production, très importante, de l'usine. On note X la variable aléatoire qui, à chaque caisse de cinquante pompes, associe le nombre de pompes présentant un défaut mécanique.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne une pompe présentant un défaut mécanique.
   b) Calculer la probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes présentant un défaut mécanique.
3. On décide d'approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre λ.
   a) Quelle valeur du paramètre λ choisit-on ? Justifier.
   b) On note Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'une caisse contienne au moins quatre pompes présentant un défaut mécanique. Arrondir le résultat au millième.

Corrigé :

1. Le prélèvement d'une pompe est une expérience aléatoire à deux issues : la pompe présente un défaut mécanique ou pas.
   La probabilité que la pompe présente un défaut mécanique est 1%=0,01.

   On reproduit cette expérience à deux issues 50 fois, de façon indépendante (puisqu'on assimile la constitution d'une caisse à un tirage avec remise).
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de pompes présentant un défaut mécanique suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}01$.
2. a) La probabilité qu'une caisse contienne une pompe présentant un défaut mécanique est $P(X = 1)$.
   On utilise la calculatrice (`binomFdp` ou équivalent).
   On trouve : $P(X = 1) \simeq 0{,}3056$
   b) La probabilité qu'une caisse contienne au moins deux pompes présentant un défaut mécanique est $P(X \geq 2)$.
   Il est plus simple de passer par l'événement contraire.
   $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$.

   $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \simeq 0{,}9106$

   Donc : $P(X \geq 2) \simeq 1 - 0{,}9106$, soit $P(X \geq 2) \simeq 0{,}0894$.
3. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.
   On vérifie que $np = 50 \times 0{,}01 = 0.5$ est petit.
   a) D'après le cours, il faut choisir $\lambda = np$, de telle sorte que les deux lois aient la même espérance.
   Ici : $\lambda = 50 \times 0{,}01 = 0{,}5$.
   b) On cherche $P(X \geq 4)$.
   On approche la loi de X par celle de Y, on a donc : $P(X \geq 4) \simeq P(Y \geq 4)$.
   On trouve à la calculatrice : $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4) = 1 - P(Y \leq 3)$.
   On obtient à la calculatrice : $P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \simeq 0{,}9982$.
   Donc : $P(Y \geq 4) \simeq 1 - 0{,}9982 = 0{,}0018$. En arrondissant : $P(Y \geq 4) \simeq 0{,}002$.

   La probabilité qu'une caisse contienne au moins quatre pompes présentant un défaut mécanique vaut environ 0,002.

On peut se demander à quoi sert d'approcher la loi de X par celle de Y, vu qu'on peut calculer $P(X \geq 4)$ directement, en passant par l'événement contraire. Pas à grand-chose, si ce n'est à faire l'exercice.

Exercice 5 :

Une coopérative est spécialisée dans la récolte de la fleur de sel. Elle utilise une machine automatique pour remplir des sachets de fleur de sel dont la masse théorique doit être de 250 grammes. La probabilité qu'un sachet ne soit pas conforme est $p = 0{,}06$.

La coopérative constitue des lots de 50 sachets pour la vente et étudie le nombre de sachets non conformes contenus dans un lot. La production de la coopérative est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler la constitution d'un lot à un tirage au hasard et avec remise de 50 sachets.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 50 sachets le nombre de sachets non conformes de ce lot.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Que représente la probabilité $P(X = 1)$ dans le contexte de l'exercice ? Calculer $P(X = 1)$.
3. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.
   a) Justifier que cette loi de Poisson a pour paramètre $\lambda = 3$.
   b) On note Y une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
   En utilisant la variable aléatoire Y, estimer la probabilité qu'il y ait au plus cinq sachets non conformes dans un lot de 50 sachets.

Corrigé :

1. Le prélèvement d'un sachet est une expérience aléatoire à deux issues : le sachet est conforme ou non. La probabilité que le sachet soit non conforme est $p = 0{,}06$.

   On reproduit cette expérience à deux issues 50 fois, de façon indépendante (puisqu'on assimile la constitution d'un lot à un tirage avec remise).
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de sachets non conformes suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}06$.
2. $P(X = 1)$ est la probabilité que dans un lot pris au hasard, il y ait exactement un sachet non conforme.
   On utilise la calculatrice (`binomFdp` ou équivalent), comme d'habitude.
   On trouve : $P(X = 1) \simeq 0{,}1447$
3. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.
   a) D'après le cours, le paramètre λ doit être égal à l'espérance de X : $\lambda = np = 50 \times 0{,}06 = 3$.
   b) La probabilité qu'il y ait au plus cinq sachets non conformes dans un lot de 50 sachets est $P(X \leq 5)$ (penser que « au plus » signifie la même chose que « pas plus de ».)
   On a $P(X \leq 5) \simeq P(Y \leq 5)$.
   On trouve à la calculatrice : $P(Y \leq 5) \simeq 0.9161$.

   La probabilité cherchée est donc d'environ 0,9161.

Exercice 6 :

Une entreprise de logistique observe qu'en moyenne il arrive chaque jour 4 camions pour le déchargement. Son entrepôt dispose de 5 quais de déchargement. On admet que les arrivées des camions sont indépendantes les unes des autres.

Soit X la variable aléatoire qui à un jour donné associe le nombre de camions arrivant pour décharger. On admet que X suit une loi de Poisson.

On considère que lorsqu'un camion arrive, il lui faut une journée pour décharger.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné, aucun camion n'attende pour décharger ?
2. L'entreprise souhaite augmenter le nombre de quais de déchargement. Combien doit-elle en construire pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?
3. On prévoit un doublement de la fréquence d'arrivée des camions. Combien l'entreprise doit-elle alors construire de quais pour que la probabilité de n'avoir aucun camion en attente soit supérieure à 95% ?

Corrigé :

1. Aucun camion n'attend, donc le nombre de camions arrivés ne dépasse pas 5 (le nombre de quais).
   On cherche alors $P(X \leq 5)$.
   On a besoin de la valeur du paramètre λ.
   On sait qu'en moyenne il arrive chaque jour 4 camions pour le déchargement. Donc l'espérance de X est 4.
   Comme $E(X) = \lambda$, alors $\lambda = 4$.

   $P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$.
   On utilise la calculatrice, on trouve : $P(X \leq 5) \simeq 0{,}7851$.

2. Soit n le nombre de quais de déchargement.
   La probabilité de n'avoir aucun camion en attente est : $P(X \leq n)$.
   Il suffit donc de calculer $P(X \leq n)$ pour $n = 6, 7, 8, ...$ jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur supérieure à 95%. Il suffit pour cela d'ajouter à chaque fois $P(X = 6)$, $P(X = 7)$, etc.

   On obtient à la calculatrice :
   $P(X \leq 6) \simeq 0{,}8893$
   $P(X \leq 7) \simeq 0{,}9489$
   $P(X \leq 8) \simeq 0{,}9786$

   Il faut avoir donc 8 quais de déchargement ; l'entreprise doit alors en construire 3.

3. On prévoit un doublement de la fréquence d'arrivée des camions. Il en arrivera donc en moyenne 8 par jour.
   Le nombre de camion suit alors la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$.
   Ceci posé, on peut appliquer la même méthode que pour la question précédente.

   On obtient à la calculatrice :
   $P(X \leq 6) \simeq 0{,}3134$
   $P(X \leq 7) \simeq 0{,}453$
   $P(X \leq 8) \simeq 0{,}5925$
   $P(X \leq 9) \simeq 0{,}7166$
   $P(X \leq 10) \simeq 0{,}8159$
   $P(X \leq 11) \simeq 0{,}8881$
   $P(X \leq 12) \simeq 0{,}9362$
   $P(X \leq 13) \simeq 0{,}9658$

   On voit qu'il faut que l'entreprise dispose de 13 quais au total ; elle devra en construire 8.