Probabilités (II)

1 Lois de Poisson

Ce type de distribution intervient lorsqu'on effectue un comptage du nombre de réalisations d'un événement donné dans un intervalle de temps fixé : nombre de particules émises par une source radioactive en une seconde, nombre de mutations génétiques durant une période donnée, nombre de proies (non digérées) contenues dans un estomac, etc.

1.1 Définition

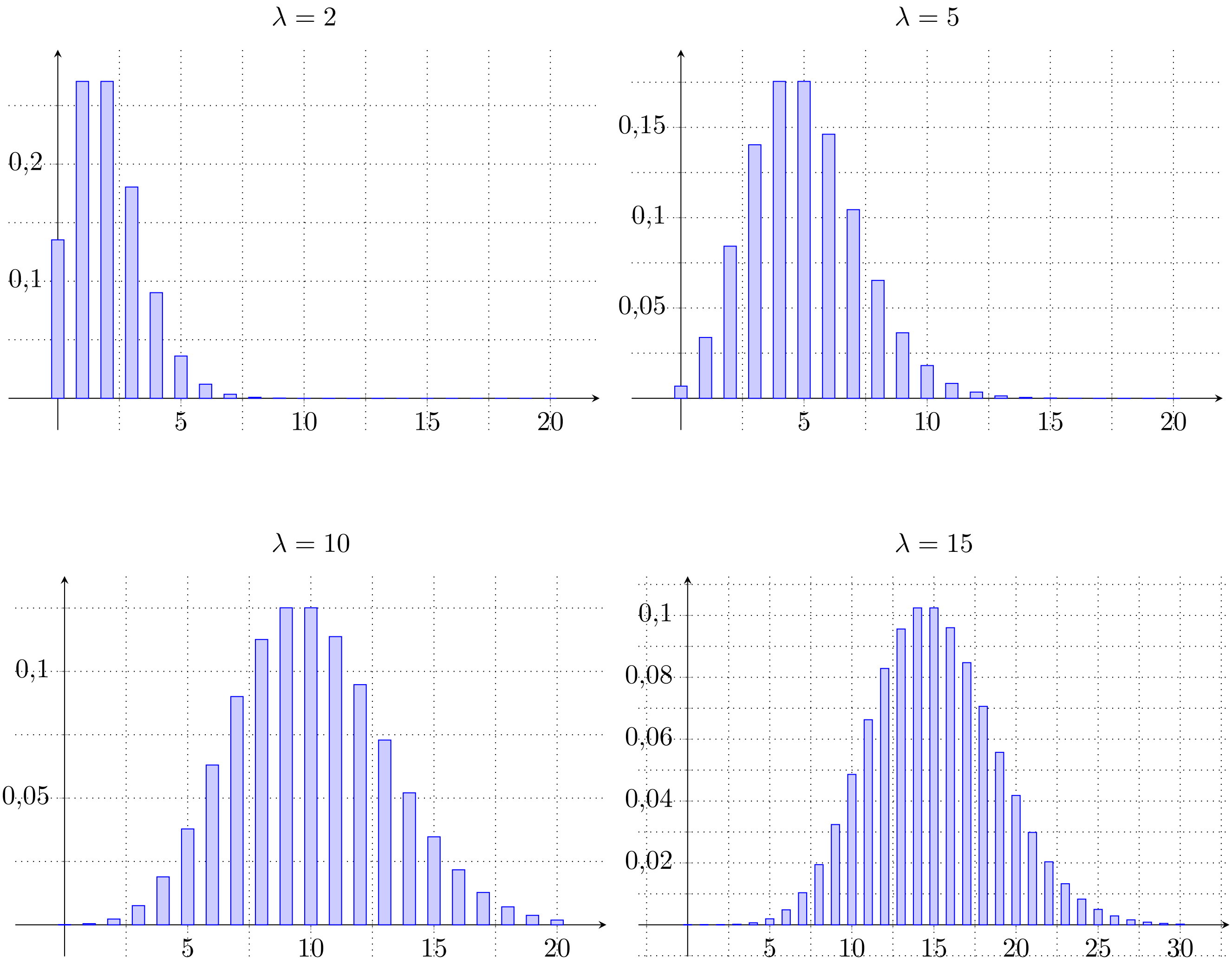
Une loi de poisson est une loi discrète. Elle dépend d'un paramètre, λ.

Définition 1
La variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ lorsque sa loi de probabilité vérifie :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

On voit que X prend une infinité de valeurs : 0, 1, 2, 3, etc.

1.2 Représentation graphique



1.3 Utilisation de la calculatrice

Pour calculer $P(X=k)$:

Sur T.I :	Sur Casio :
• Taper `distrib`. • Choisir `poissonFdp` ou `poissonpdf`. • Taper les arguments dans l'ordre : λ, k. • Fermer la parenthèse et valider.	• Taper `OPTN, F5, F3, F6, F1, F1` pour obtenir `POISN Ppd`. • Taper les arguments dans l'ordre : k, λ. • Valider.

(Certaines Casio utilisent la lettre μ au lieu de λ.)

1.4 Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

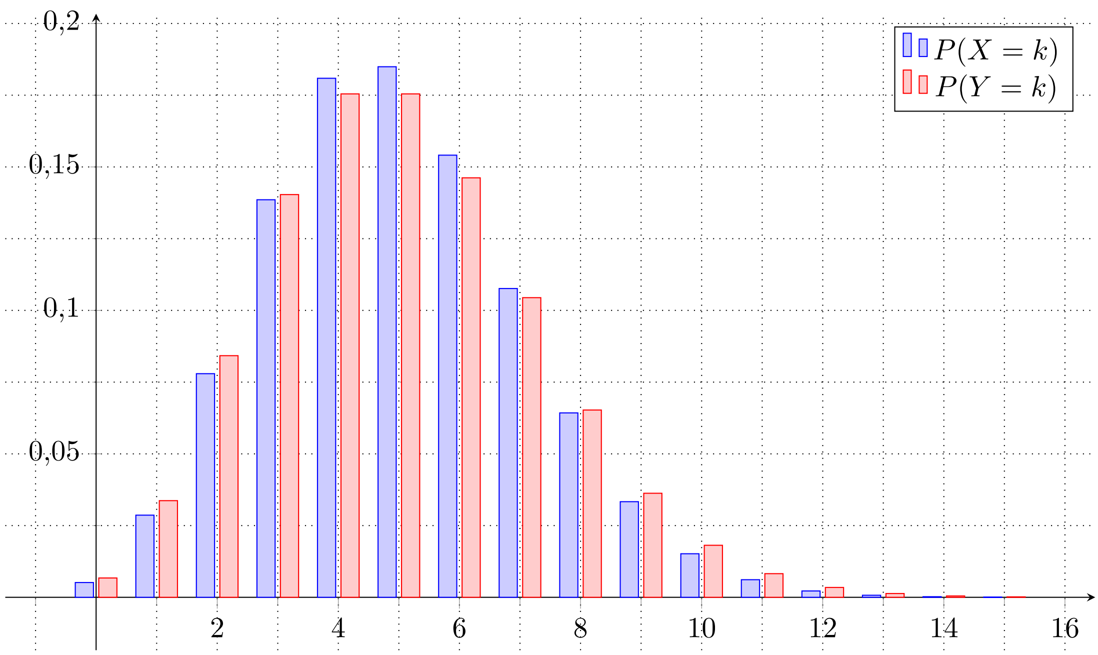
Propriété 1
Espérance : $E(X)=\lambda$, variance : $V(X)=\lambda$, écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

1.5 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Propriété 2
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $(n\,;p)$. Si n est suffisamment grand et p suffisamment petit, X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $\lambda=np$.

On utilise couramment cette approximation si $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$, mais ces conditions ne sont pas à savoir.

Illustration : le graphique ci-dessous représente en bleu les probabilités $P(X)=k$, où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;0{,}1)$ et en rouge les probabilités $P(Y)=k$, où Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda=5$



À retenir : Pour approcher une loi binomiale, on utilise :

- une loi de Poisson si np est petit
- une loi normale sinon.

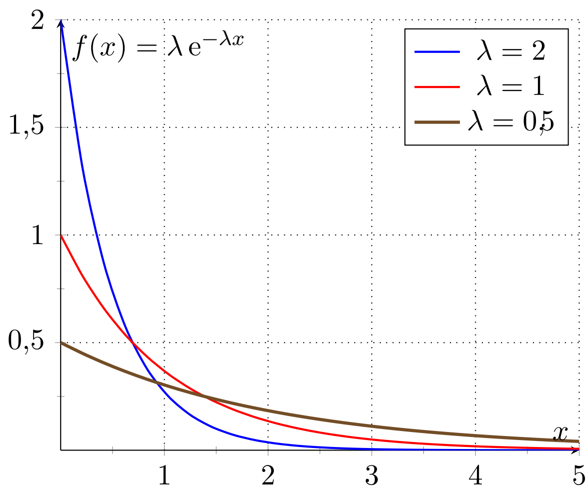
2 Lois exponentielles

La plupart des phénomènes naturels sont soumis au processus de vieillissement. Il existe des phénomènes où il n'y a pas de vieillissement ou d'usure. Les variables aléatoires décrivant une durée de vie sans usure suivent une loi exponentielle.

2.1 Définition et exemples

Définition 2
Soit λ un réel strictement positif. On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi de probabilité définie sur $[0\,;+\infty[$ admettant pour densité la fonction f : $f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

Exemples :



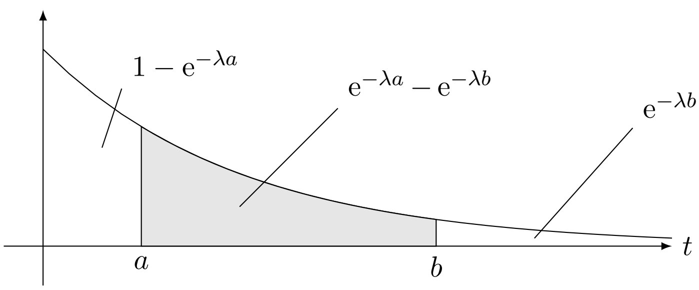
Remarque :
Dire que la v.a. X suit la loi exponentielle de paramètre λ signifie que pour $a,b \in [0\,;+\infty[$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$, on a : $u'(t) = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Donc :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b -u'(t)\mathrm{d}t = -(u(b) - u(a)) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

Si $a = 0$, on en déduit : $P(X \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b}$ et en passant à l'événement contraire : $P(X \geq b) = \mathrm{e}^{-\lambda b}$.



2.2 Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Propriété 3
Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, variance : $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, écart-type : $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

2.3 Propriété : durée de vie sans vieillissement

Propriété 4
Si la v.a. X suit une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs x et h, on a :

$$P_{X \geq x}(X \geq x+h) = P(X \geq h)$$

Interprétation :

Appelons X la v.a. qui modélise la durée de vie d'un appareil, en heures. $P(X \geq x)$ est la probabilité que la durée de vie soit au moins de x heures, c'est à dire que l'appareil fonctionne encore après x heures.

Alors $P_{X \geq x}(X \geq x+h)$ est la probabilité que l'appareil fonctionne encore après $x+h$ heures sachant qu'il fonctionne encore après x heures.

La propriété précédente signifie donc que la probabilité que l'appareil fonctionne encore h heures de plus sachant qu'il a déjà fonctionné x heures est indépendante de x : il n'y a pas de vieillissement.

Une autre interprétation se rapporte à la radioactivité : la probabilité qu'un noyau se désintègre entre les temps x et $x+h$ est indépendante de x.

3 Fiabilité

3.1 Définition

On désigne par T la variable aléatoire qui, à un appareil ou un système, associe son temps de bon fonctionnement ou sa durée de vie. Le temps $t = 0$ correspond au début de l'expérience (la mise en marche de l'appareil.) La variable T est alors une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0; +\infty[$.

Définition 3
La fonction de fiabilité d'un système non réparable est la fonction du temps notée R (R pour reliability) definie pour tout t réel positif par : $R(t) = P(T > t)$.

Ainsi, $R(t)$ est la probabilité que le système continue à fonctionner correctement après une durée t. R est une fonction décroissante. Cela traduit le fait naturel que l'aptitude au bon fonctionnement d'un système non réparable diminue avec le temps.

La principale mesure de fiabilité n'est pas la fonction de fiabilité mais le taux de défaillance.

Définition 4
Le taux de défaillance ou taux de panne d'un système non réparable est la fonction du temps h définie par : $h(t) = \dfrac{1}{\Delta t} P_{T>t}(t < T \leq t + \Delta t)$, Δt étant une durée fixée arbitrairement petite.

Ainsi, $h(t)$ est la probabilité que le système tombe en panne entre les instants t et $t + \Delta t$, sachant qu'il a bien fonctionné entre 0 et t.

3.2 Lien avec les lois exponentielles

Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P_{T>t}(t < T \leq t + \Delta t)$ ne dépend pas de t, d'après la propriété 4. Ainsi, $h(t)$ est une fonction constante.

On a donc : $h(t) = \dfrac{1}{\Delta t} P(T \leq \Delta t)$. Or la limite de $\dfrac{1}{\Delta t} P(T \leq \Delta t)$ quand Δt tend vers 0 est $f(0)$, où f est la densité de probabilité de T. On a : $f(0) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda \times 0} = \lambda$.

Ainsi, si Δt est assez petit, on a $h(t) \simeq \lambda$. Le taux de défaillance est donc constant, égal environ à λ .