Correction du devoir surveillé nº5

Exercice 1 :

1) D'après la courbe, on trouve : $f(0)=-2$, $f'(0)=1$ et $f'(-1)=0$.

2) On voit facilement que le coefficient directeur de la tangente en 0 est 1 et que celle-ci passe par le point de coordonnées $(0;-2)$.
L'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est donc : $y=x-2$.

3) On voit que f est décroissante sur $[-3;-1]$ et croissante sur $[-1;4]$. Sa dérivée f' doit donc être négative sur $[-3;-1]$ et positive sur $[-1;4]$. Les figure 2 et 4 ne conviennent pas.
D'autre part, $f'(0)=1$. Donc la courbe 1 ne convient pas.

Parmi les quatre représentations graphiques, celle qui représente la fonction dérivée f' est donc la courbe de la **figure 3**.

Exercice 2 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes (on ne s'occupe pas de l'ensemble de définition.)

$f'(x)=3x^2-4$

♣♣♣♣♣♣♣

$g(x)=\frac{5}{x}=5\times\frac{1}{x}$ donc $g'(x)=5\times-\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$.

♣♣♣♣♣♣♣

La fonction h se présente sous forme d'un produit. On pose donc :

$u(x)=x^2$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

On a alors : $h(x)=u(x)\times v(x)$, donc $h'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$.

On calcule : $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On remplace : $h'(x)=2x\sqrt{x}+x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}$.

On peut simplifier cette formule en réduisant au même dénominateur et en tenant compte du fait que $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2=x$:

$$h'(x)=\frac{2x\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{4x\times x}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$$

On peut encore simplifier, si on en a besoin, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}$:

$$h'(x)=\frac{5x^2\times\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{5x^2\sqrt{x}}{2x}=\frac{5x\sqrt{x}}{2}$$

♣♣♣♣♣♣♣

La fonction k se présente sous forme d'un quotient. On pose :

$u(x)=x+1$ et $v(x)=x+3$.

On a alors : $k(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, donc $k'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$.

$u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

Donc :

$$k'(x)=\frac{1\times(x+3)-(x+1)\times1}{(x+3)^2}=\frac{2}{(x+3)^2}$$

Exercice 3 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$.

1. On a : $f'(x)=3x^2-3\times 2x-9=3x^2-6x-9$.
2. et 3. On voit que $f'(x)$ est un trinôme du second degré. Il n'y a pas de factorisation évidente.
   On peut toutefois mettre 3 en facteur, ça allège un peu les calculs :
   $f'(x)=3\times(x^2-2x-3)$.
   f' est donc du signe de x^2-2x-3 .
   Cherchons si f' a des racines.
   $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-3)=4+12=16$. Δ est positif, donc il y a deux racines.

   $$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 1}=\frac{6}{2}=3 \qquad x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$$

   Le signe de f' est le signe de a, donc positif, sauf entre les racines.

   On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	9	↘	-23	↗	

3. L'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse 0 est : $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$.
   On a : $f'(0)=-9$ et $f(0)=4$.
   Donc l'équation cherchée est : $y=-9x+4$.

4. Une tangente est horizontale si son coefficient directeur est 0.
   On résout donc l'équation $f'(x)=0$.

   On sait que les racines de f sont – 1 et 3. Les points en lesquels la tangente est horizontale ont donc pour coordonnées : $(-1;9)$ et $(3;-23)$.