Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

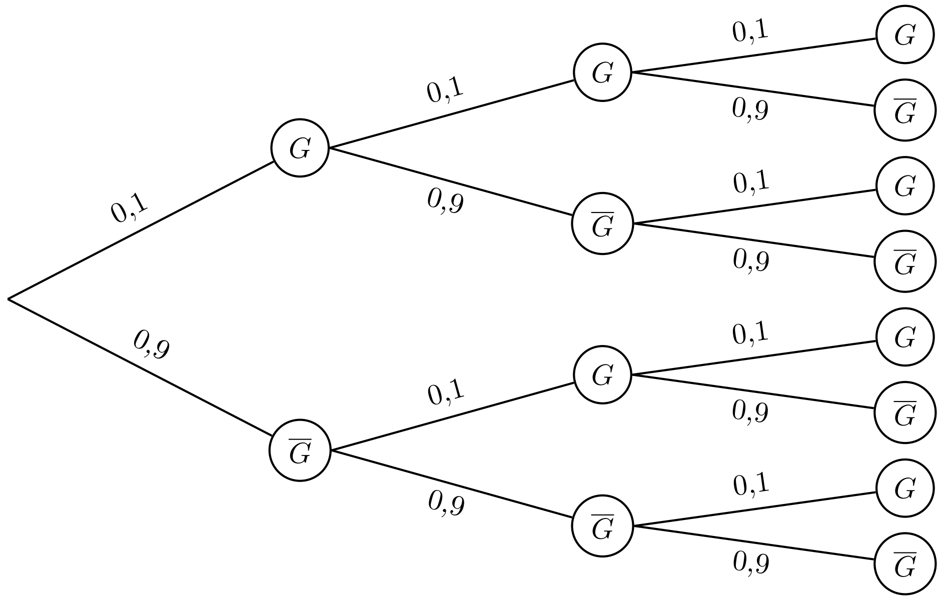
1. Les valeurs prises par X sont, d'après l'énoncé : 18, 12, 8, 5.
   Or $P(X = 18) = P(\text{"la boule tirée est bleue"}) = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$ car il y a deux boules bleues sur un total de 20 boules (il y a équiprobabilité car on tire une boule au hasard).
   De même : $P(X = 12) = P(\text{"la boule tirée est verte"}) = \dfrac{4}{20} = 0{,}2$
   $P(X = 8) = P(\text{"la boule tirée est jaune"}) = \dfrac{6}{20} = 0{,}3$
   $P(X = 5) = P(\text{"la boule tirée est rouge"}) = \dfrac{8}{20} = 0{,}4$.
   On obtient :

k	18	12	8	5
$P(X = k)$	0,1	0,2	0,3	0,4

2. $E(X) = 18 \times 0{,}1 + 12 \times 0{,}2 + 8 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}4$
   $E(X) = 8{,}6$.

Exercice 2 :

1. La proportion de billets gagnants est de 1 sur 10. Comme on choisit au hasard, il y a équiprobabilité et donc la probabilité de tomber sur un billet gagnant est de 1 sur 10, ou 0,1.
   Notons : G l'événement "le billet est gagnant" et $\overline{G}$ l'événement "le billet est perdant".
   On peut alors représenter la situation par l'arbre suivant :



2. La variable X dénombre les billets gagnants parmi les trois billets tirés. Il peut y en avoir 0, 1, 2 ou 3.
   Donc X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.
   • Pour $X = 0$, on voit qu'un seul parcours sur l'arbre correspond : c'est $\overline{G};\overline{G};\overline{G}$.
   Donc $P(X = 0) = P(\overline{G};\overline{G};\overline{G}) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}729$.
   • Pour $X = 1$, on voit que trois parcours correspondent :
   $G;\overline{G};\overline{G}$
   $\overline{G};G;\overline{G}$
   et $\overline{G};\overline{G};G$.
   Or, $P(G;\overline{G};\overline{G}) = P(\overline{G};G;\overline{G}) = P(\overline{G};\overline{G};G) = 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}081$.
   Donc $P(X = 1) = 3 \times 0{,}081 = 0{,}243$.
   • Pour $X = 2$, on voit à nouveau que trois parcours correspondent :

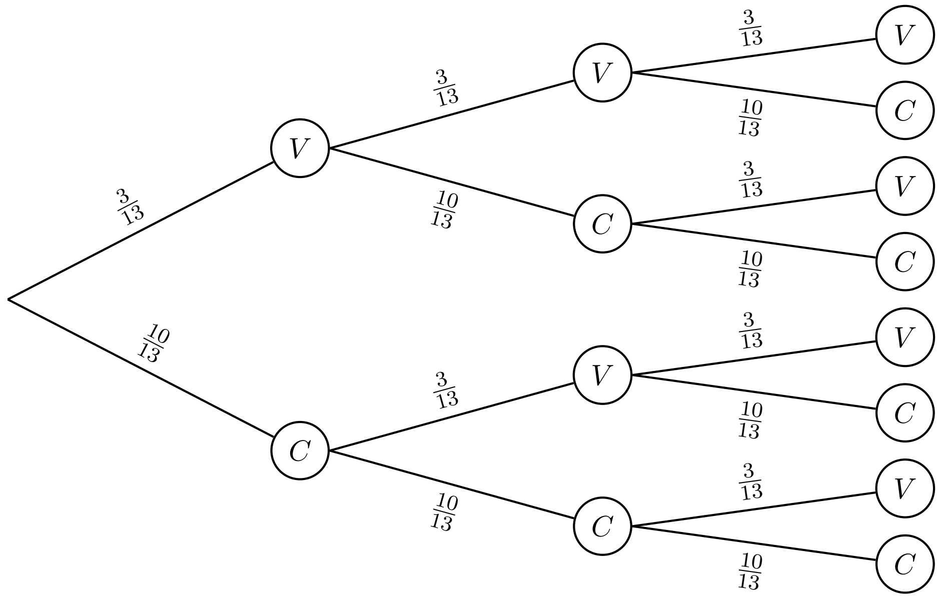
$G;G;\overline{G}$
$G;\overline{G};G$
et $\overline{G};G;G$.
Or, $P(G;G;\overline{G}) = P(G;\overline{G};G) = P(\overline{G};G;G) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}009$.
Donc $P(X=1) = 3 \times 0{,}009 = 0{,}027$.
• Enfin, pour $X=3$, on voit qu'un seul parcours correspond : c'est $G;G;G$.
Donc $P(X=3) = P(G;G;G) = 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}001$.
On obtient le tableau :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,729	0,243	0,027	0,001

3. $E(X) = 0 \times 0{,}729 + 1 \times 0{,}243 + 2 \times 0{,}027 + 3 \times 0{,}001 = 0{,}3$
Interprétation : Si on fait un grand nombre de fois l'expérience, on va trouver qu'en moyenne, sur trois billets, il y a 0,3 billet gagnant.

Exercice 3 :

1. Notons : V l'événement : "la lettre tapée est une voyelle" et C : "la lettre tapée est une consonne".
On tape au hasard sur le clavier, donc il y a équiprobabilité.
Par conséquent, si on tape une lettre, la probabilité d'obtenir une voyelle est $P(V) = \dfrac{6}{26} = \dfrac{3}{13}$.
De même, la probabilité de taper une consonne est $P(C) = \dfrac{20}{26} = \dfrac{10}{13}$.
L'arbre suivant illustre la situation :



La probabilité d'obtenir trois voyelles est donc : $P(V;V;V) = \dfrac{3}{13} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{3}{13} = \dfrac{27}{2197} \simeq 0{,}0123$.
2. Quand l'événement contient l'expression "au moins", il est parfois plus intéressant de considérer l'événement contraire.
Ici, le contraire de l'événement "obtenir au moins une consonne" est l'événement "n'obtenir aucune consonne", c'est à dire "obtenir seulement des voyelles".
Ainsi, la probabilité de l'événement "obtenir au moins une consonne" est :
$1 - P(V;V;V) = 1 - \dfrac{27}{2197} = \dfrac{2170}{21970} \simeq 0{,}09877$.
3. Ici, obtenir exactement une consonne, c'est obtenir une consonne et deux voyelles.
Trois listes correspondent :
$C;V;V$
$V;C;V$

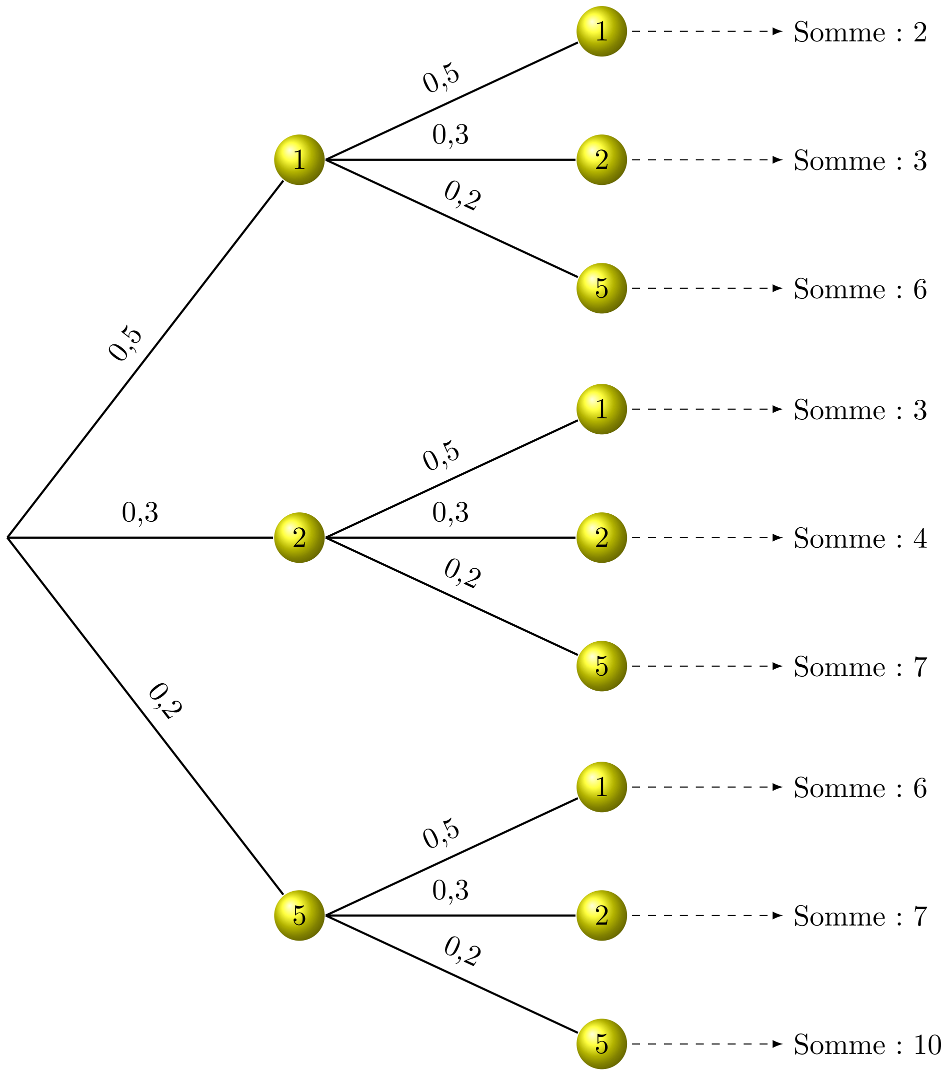
et $V;V;C$.

Or $P(C;V;V) = P(V;C;V) = P(V;V;C) = \dfrac{10}{13} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{3}{13} = \dfrac{90}{2197}$

Par conséquent, la probabilité d'obtenir exactement une consonne est : $3 \times \dfrac{90}{2197} = \dfrac{270}{2197} \simeq 0{,}1229$

Exercice 4 :

1. Comme on tire chaque jeton au hasard, il y a équiprobabilité, et comme on remet dans l'urne le premier jeton tiré, celle-ci contient toujours cinq jetons numérotés 1, trois jetons numérotés 2 et deux jetons numérotés 5.
   Il y a 10 jetons en tout. La probabilité de tirer un jeton numéroté "1" est de $\dfrac{5}{10} = 0{,}5$, la probabilité de tirer un jeton numéroté "2" est de $\dfrac{3}{10} = 0{,}3$ et la probabilité de tirer un jeton numéroté "5" est de $\dfrac{2}{10} = 0{,}2$.
   On représente dans l'arbre ci-dessous les numéro des jetons tirés, puis à droite, la somme correspondant à chaque tirage.



2. D'après l'arbre, la probabilité que les deux jetons portent le numéro 5 est : $P(5\,;5) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.
3. La somme des deux numéros est égale à 7 si on tire le numéro 2, puis le numéro 5 ou le numéro 5 puis le numéro 2.
   La probabilité que la somme soit égale à 7 est donc : $P(2\,;5) + P(5\,;2) = 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}12$.
4. D'après l'arbre, les valeurs prises par X sont : 2, 3, 4, 6, 7, 10.
   Calculons :
   $P(X = 2) = P(1\,;1) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$
   $P(X = 3) = P(1\,;2) + P(2\,;1) = 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}3$
   $P(X = 4) = P(2\,;2) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$

$P(X=6) = P(1\,;5) + P(5\,;1) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}2$
$P(X=7) = P(2\,;5) + P(5\,;2) = 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}12$
$P(X=10) = P(5\,;5) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

Le tableau :

k	2	3	4	6	7	10
$P(X=k)$	0,25	0,3	0,09	0,2	0,12	0,04

5. Les valeurs prises par Y sont 3 et -2 (car on compte en négatif une perte.)
   Le tableau de Y se déduit du tableau de X :
   $P(Y=3) = P(X \geq 6) = 0{,}2 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}36$
   $P(Y=-2) = P(X \leq 4) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}09 = 0{,}64$

   Le tableau :

a	3	-2
$P(Y=a)$	0,36	0,64

6. $E(Y) = 3 \times 0{,}36 - 2 \times 0{,}64 = -0{,}2$
   Non, le jeu n'est pas équitable. En moyenne, le joueur perd 0,2 € par partie.