Second degré

Première ES

19 septembre 2013

Fonction polynôme du second degré

Définition 1

On appelle fonction **polynôme du second degré** (ou trinôme du second degré) toute fonction f de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemples :

- $P(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$
- $P(x) = 4x^2$, on a : $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$
- $2x + 1$, $6x^3 + 4x + 2$ et $(x-1)^2 - x^2$ ne sont pas du second degré

Forme canonique

Définition 2

Une expression de la forme $\alpha(x-\alpha)^2+\beta$ s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Remarque : $f(\alpha)$ est l'extremum de f (minimum ou maximum suivant que α est positif ou négatif) et α est la valeur de x pour laquelle le sens de variation change.

Exemple : $x^2-8x+7=(x-4)^2-9$

Transformation de l'écriture ax^2+bx+c :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Or, si on développe l'expression $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ en utilisant l'identité remarquable, on obtient :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

Par conséquent :

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$$

On peut alors remplacer dans l'égalité de départ :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

On réduit au même dénominateur :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4a \times c}{4a \times a}\right]$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$; l'égalité précédente devient :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

On voit qu'on peut écrire n'importe quel trinôme sous forme canonique.

Solutions de l'équation et factorisation

Le problème : On désire résoudre l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ et factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$.

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On dit que Δ est le **discriminant** du trinôme $x \to ax^2 + bx + c$.

L'étude précédente a permis de montrer que résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$.

Comme $a \neq 0$, ceci équivaut à : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$.

ou encore à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Dans cette dernière expression, tout est positif sauf éventuellement Δ, ce qui nous amène à distinguer 3 cas :

Premier cas : $\Delta < 0$

Alors on a aussi $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$.

Comme un carré est toujours positif, l'équation $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ ne peut pas avoir de solution.

Et on ne peut pas factoriser en produits de facteurs du premier degré, sinon, on pourrait trouver des solutions.

Deuxième cas : $\Delta = 0$

L'équation devient : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Alors on obtient : $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ soit $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Il y a une seule solution et on peut écrire $f(x) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

Troisième cas : $\Delta > 0$

Alors Δ admet une racine carrée, donc l'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ se réécrit ainsi :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

Or, on sait que deux nombres qui ont le même carré sont soit égaux soit opposés. Ainsi :

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ceci nous donne donc :

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation admet donc deux solutions, notées en général x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On peut factoriser :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

donc en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

soit (en enlevant les crochets, qui ne servent à rien) :

$$f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$$

En résumé :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

Théorème 1

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $f(x) = 0$ a une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions réelles :
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et
  $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples :

$-6x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$

Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{-12} = -\frac{1}{3}$$

$S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = -6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Exemples :

$5x^2 + 6x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$

Le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution réelle

$S = \varnothing$ et f ne se factorise pas

Exemples :

$2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{25}{8} = 0$

Le discriminant est nul, il y a une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{4}$

$S = \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = 2\left(x + \dfrac{5}{4}\right)^2$

Signe du trinôme

Étudions le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$

Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines, dans l'ordre croissant, et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	|	signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	
$(x-x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x-x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est strictement positive, le signe de $f(x)$ est donc le même que celui de a

Théorème 2

Le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent

Exemples :

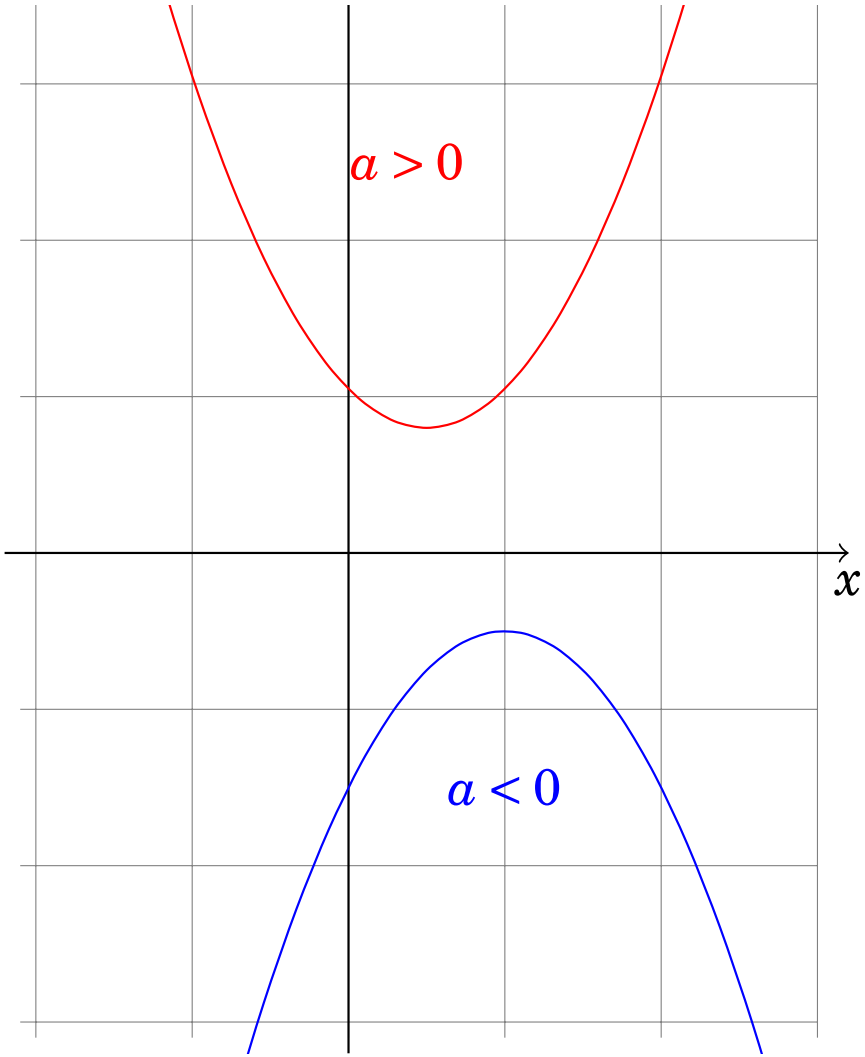
- $f(x) = -6x^2+x+1$
  Le discriminant est positif, f est du signe de $a=-6$, donc négative sauf entre ses racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$
- $5x^2+6x+2=0$
  Le discriminant est négatif, f est du signe de $a=5$, donc positive sur $\mathbb{R}$
- $2x^2+5x+\frac{25}{8}=0$
  Le discriminant est nul, f est du signe de $a=2$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et nulle en $x_0=-\frac{5}{4}$

Représentation graphique

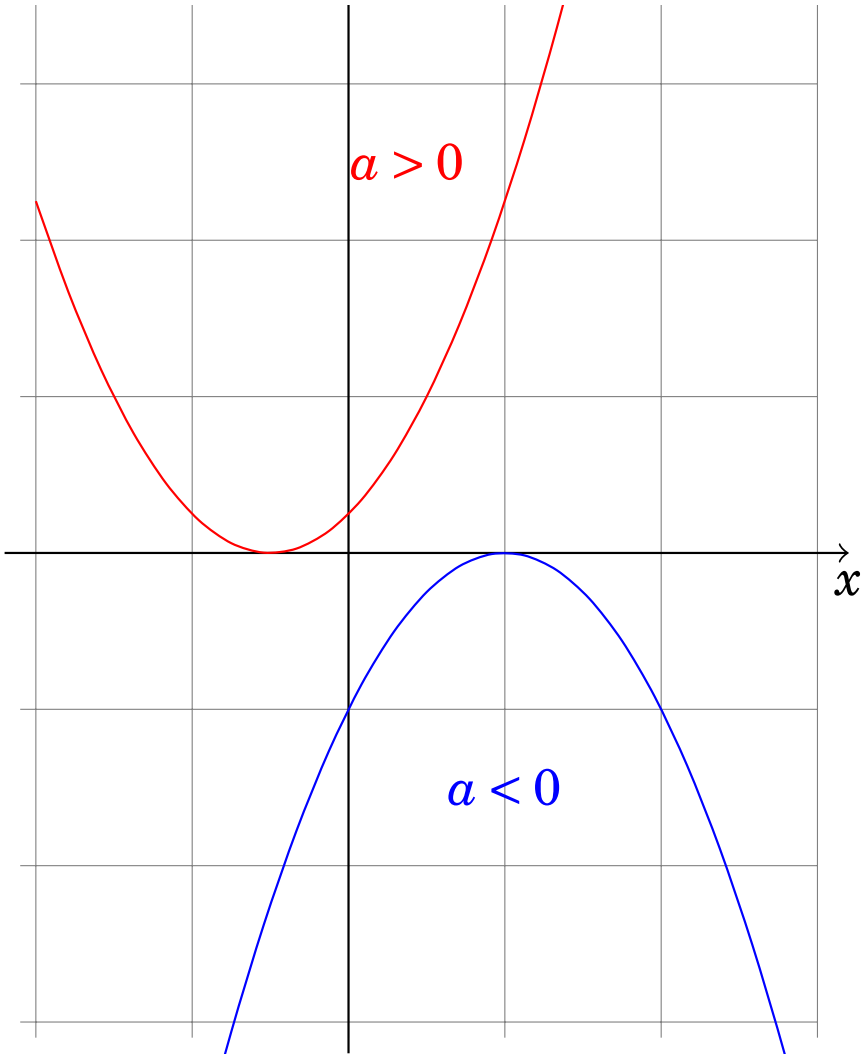
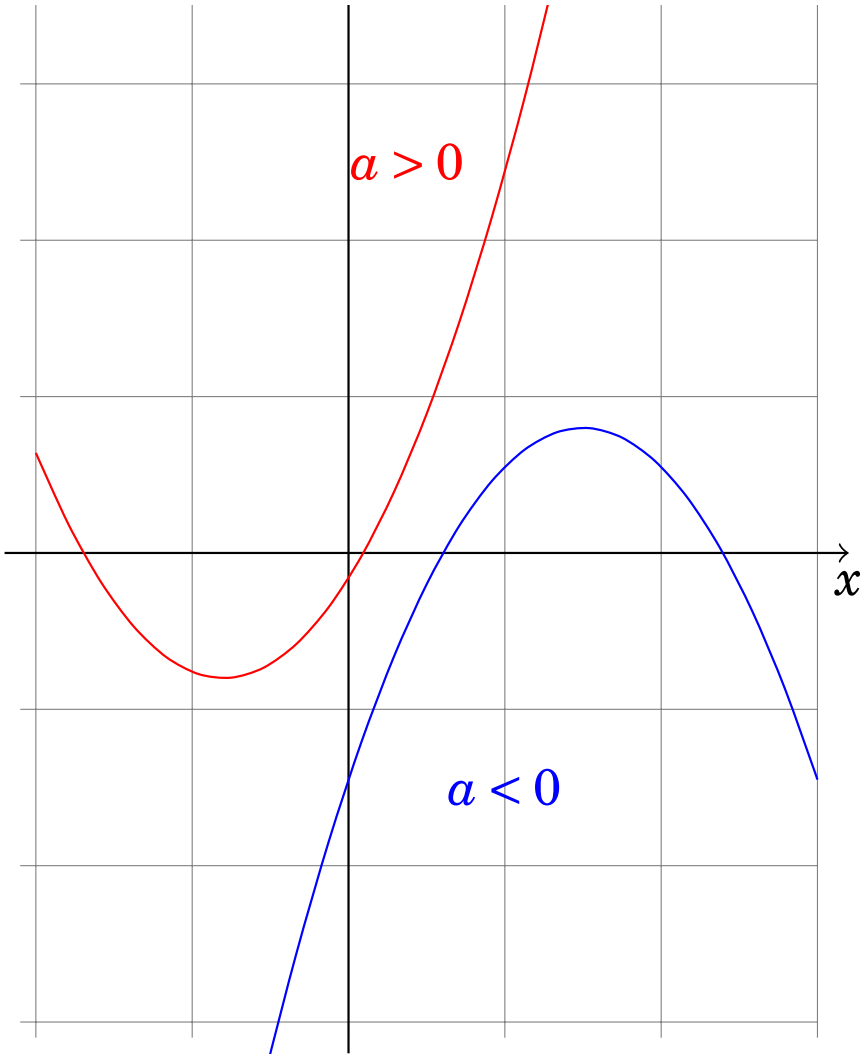
La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole.

L'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$.

$\Delta < 0$



$\Delta = 0$



$\Delta > 0$