Second degré

1 Fonction polynôme du second degré

Définition 1

On appelle fonction **polynôme du second degré** (ou trinôme du second degré) toute fonction f de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemples :
- $f(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$.
- $f(x) = 4x^2$, on a : $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$.
- $x \mapsto 2x + 1$, $x \mapsto 6x^3 + 4x + 2$ et $x \mapsto (x-1)^2 - x^2$ ne sont pas des trinômes du second degré.

2 Forme canonique

Soit $x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré.

Définition 2

Une expression de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Remarque : $f(\alpha)$ est l'extremum de f (minimum ou maximum suivant que a est positif ou négatif) et α est la valeur de x pour laquelle le sens de variation change.

Exemple : $x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$

Transformation de l'écriture $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

3 Solutions de l'équation et factorisation

Le problème : On désire résoudre l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ et factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$.

Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$. On dit que Δ est le **discriminant** du trinôme $x \to ax^2 + bx + c$

Théorème 1

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $f(x) = 0$ a une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples :
- $-6x^2 + x + 1 = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$
  Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 5}{-12} = \dfrac{1}{2}$
  $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + 5}{-12} = -\dfrac{1}{3}$

$S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = -6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

- $5x^2 + 6x + 2 = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$

  Le discriminant est négatif, il n'y a pas de solution réelle

  $S = \varnothing$ et f ne se factorise pas

- $2x^2 + 5x + \frac{25}{8} = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \frac{25}{8} = 0$

  Le discriminant est nul, il y a une solution double : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4}$

  $S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

4 Signe du trinôme

Théorème 2

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.

Exemple :

- $f(x) = -6x^2 + x + 1$

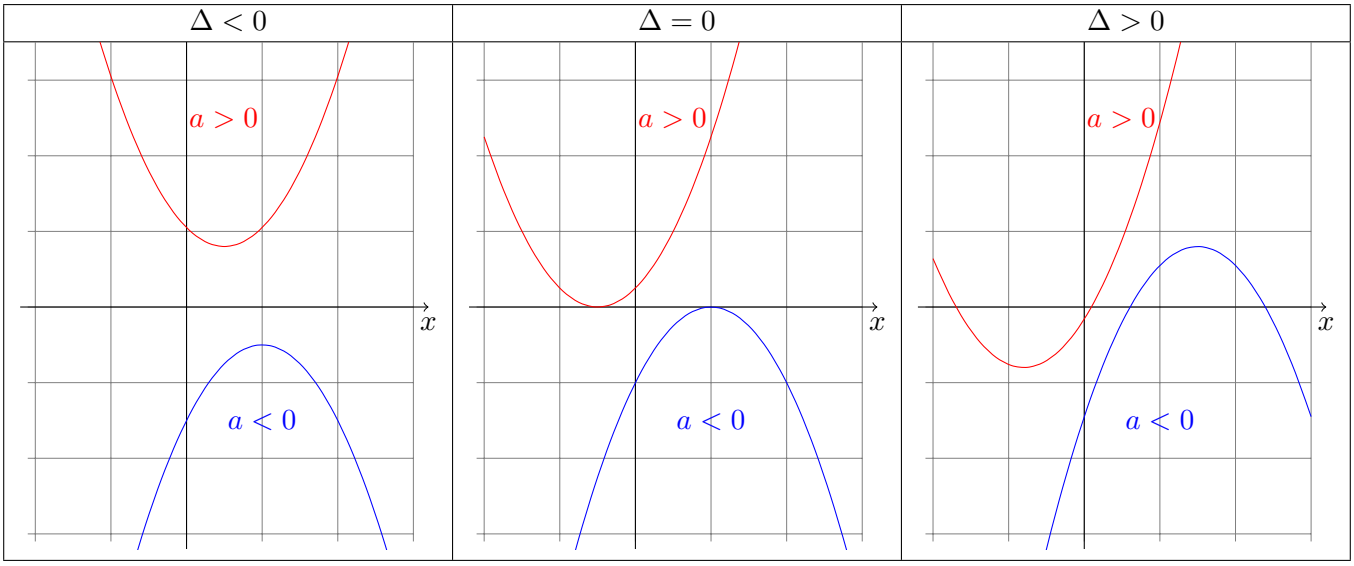
  Le discriminant est positif, f est du signe de $a = -6$, donc négative sauf entre ses racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$

- $5x^2 + 6x + 2 = 0$

  Le discriminant est négatif, f est du signe de $a = 5$, donc positive sur $\mathbb{R}$

- $2x^2 + 5x + \frac{25}{8} = 0$

  Le discriminant est nul, f est du signe de $a = 2$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et nulle en $x_0 = -\frac{5}{4}$

5 Représentation graphique

La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole. L'abscisse du sommet est $-\frac{b}{2a}$.