Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. $5x^2 + 19x – 4 = 0$
   Pas de factorisation évidente, on applique la méthode générale. On a : $a = 5$, $b = 19$, $c = -4$.
   $\Delta = 19^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 441$
   $\Delta > 0$, il y a donc deux racines.
   $x_1 = \dfrac{-19 - \sqrt{441}}{2 \times 5} = \dfrac{-19 - 21}{10} = -4$
   $x_2 = \dfrac{-19 + \sqrt{441}}{2 \times 5} = \dfrac{-19 + 21}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-4; \dfrac{1}{5}\right\}}$
2. $x^2 - x + 3 = 0$
   Pas de factorisation évidente, on applique la méthode générale. On a : $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11$
   $\Delta < 0$, il n'y a donc pas de racines.
   $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$
3. $10x^2 + 42x = x^2 - 49$
   On commence par déplacer le second membre : $10x^2 + 42x - x^2 + 49 = 0$ soit : $9x^2 + 42x + 49 = 0$.
   Pas de factorisation évidente, on applique la méthode générale. On a : $a = 9$, $b = 42$, $c = 49$.
   $\Delta = 42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 0$
   $\Delta = 0$, il y a donc une seule racine.
   $x_0 = \dfrac{-42}{2 \times 9} = -\dfrac{7}{3}$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{7}{3}\right\}}$

Exercice 2 :

1. $5x - 7x^2 - 8 < 0$
   Commençons par réécrire les termes dans l'ordre usuel : $-7x^2 + 5x - 8 < 0$.
   On cherche d'abord si le trinôme a des racines. On a : $a = -7$, $b = 5$, $c = -8$.
   $\Delta = 5^2 - 4 \times (-7) \times (-8) = -199$
   $\Delta < 0$, il n'y a donc pas de racines. On sait alors que, quelque soit x, le trinôme est toujours du signe de a.
   Ici a est négatif, donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
signe de $-7x^2+5x-8$	$-$

   Donc, pour toute valeur de x, $-7x^2 + 5x - 8 < 0$. Tous les nombres sont solution de cette inéquation.
   $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty; +\infty[}$ ou $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$
2. $3x^2 - 9x - 30 \leq 0$
   On cherche si le trinôme a des racines. On a : $a = 3$, $b = -9$, $c = -30$.

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times (-30) = 441$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines.
$x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{441}}{2 \times 3} = \dfrac{9 - 21}{6} = -2$
$x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{441}}{2 \times 3} = \dfrac{9 + 21}{6} = 5$
On sait que le trinôme est du signe de a sauf entre les racines. Ici a est positif.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signe de $3x^2 - 9x - 30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On voit que $3x^2 - 9x - 30 \leq 0$ lorsque $x \in [-2; 5]$
$\boxed{\mathscr{S} = [-2; 5]}$

Exercice 3 :

Pour $\mathcal{C}_1$:

La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$; il n'y a pas de racine, donc $\Delta < 0$.

Pour $\mathcal{C}_2$:

La parabole est tournée vers le bas donc $a < 0$; il y a deux racines, donc $\Delta > 0$.

Pour $\mathcal{C}_3$:

La parabole est tournée vers le bas donc $a < 0$; il y a une seule racine, donc $\Delta = 0$.

Pour $\mathcal{C}_4$:

La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$; il y a deux racines, donc $\Delta > 0$.

Exercice 4 :

On note x le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < x < 60$. On sait que $C(x) = 2x^2 + 10x + 900$ est le coût total en euros pour la production de x tonnes de farine.

1. On calcule : $C(60) = 2 \times 60^2 + 10 \times 60 + 900 = 8700$
   Le coût total pour la production de 60 tonnes de farine est donc $\boxed{8700 \text{ €}}$.
2. On résout : $C(x) = 4500$, soit $2x^2 + 10x + 900 = 4500$.
   C'est équivalent à : $2x^2 + 10x - 3600 = 0$.
   Pas de factorisation évidente, on applique la méthode générale. On a : $a = 2$, $b = 10$, $c = -3600$.
   $\Delta = 10^2 - 4 \times 2 \times (-3600) = 28900$
   $\Delta > 0$, il y a donc deux racines.
   $x_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{28900}}{2 \times 2} = \dfrac{-10 - 170}{4} = -45$
   $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{28900}}{2 \times 2} = \dfrac{-10 + 170}{4} = 40$
   Compte tenu du fait que x est positif, on voit qu'il faut fabriquer $\boxed{40 \text{ tonnes}}$ de farine pour que le coût de production soit égal à 4500€.
3. Chaque tonne de farine est vendue au prix de 120 €.
   Donc, la vente de x tonnes de farine rapporte $x \times 120 = 120x$ (en €.)
   La recette est donc : $R(x) = 120x$, avec x en tonnes et $R(x)$ en euros.

Le bénéfice est la différence recette − coût.
Donc $B(x) = R(x) - C(x) = 120x - (2x^2 + 10x + 900) = 120x - 2x^2 - 10x - 900 = -2x^2 + 110x - 900$.

4. L'entreprise est bénéficiaire si le bénéfice est positif.
On résout : $B(x) > 0$.
On cherche si le trinôme a des racines. On a : $a = -2$, $b = 110$, $c = -900$.
$\Delta = 110^2 - 4 \times (-2) \times (-900) = 4900$
$\Delta > 0$, il y a donc deux racines.
$x_1 = \dfrac{-110 - \sqrt{4900}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-110 - 70}{-4} = 45$
$x_2 = \dfrac{-110 + \sqrt{4900}}{2 \times (-2)} = \dfrac{-110 + 70}{-4} = 10$
On sait que le trinôme est du signe de a sauf entre les racines. Ici a est négatif.

x	0		10		45		60
signe de $-2x^2 + 110x - 900$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On voit que $-2x^2 + 110x - 900 > 0$ lorsque $x \in]10; 45[$.
L'entreprise est bénéficiaire si elle fabrique $\boxed{\text{entre 10 et 45 tonnes}}$ de farine.

5. On sait que le maximum de $B(x)$ est obtenu lorsque $x = \dfrac{-b}{2a}$.
Ici : $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-110}{-4} = 27{,}5$.
Il faut donc fabriquer $\boxed{\text{27,5 tonnes}}$ de farine pour que le bénéfice soit maximal.
On peut calculer ce bénéfice maximum ; on trouve 612,5 €.