Correction du devoir surveillé n°6

Exercice 1 :

1. $u_1 = 1^2 - 5 = -4$; $u_2 = 2^2 - 5 = -1$.

2. $v_1 = \frac{v_0}{3} + 2 = \frac{246}{3} + 2 = 84$

$$v_2 = \frac{v_1}{3} + 2 = \frac{84}{3} + 2 = 30$$

Exercice 2 :

Soit u la suite arithmétique de raison 3 et telle que $u_3 = 16$.

1. Pour passer de u_0 à u_3 , on ajoute trois fois la raison, soit 9.

Donc pour retrouver u_0 à partir de u_3 , il suffit de soustraire 9.

On trouve $u_0 = 7$.

Comme (u_n) est arithmétique, alors $u_n = u_0 + n \times r$.

Ici, cela donne : $u_n = 7 + n \times 3$.

Ainsi, $u_7 = 7 + 7 \times 3 = 28$.

On peut aussi ajouter quatre fois la raison à partir de u_3 : $16 + 4 \times 3 = 28$.

2. On a vu que $u_n = 7 + n \times 3$, soit en abrégé : $u_n = 7 + 3n$.

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 5 \times 0,2^n$.

1. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 0,2^{n+1}}{5 \times 0,2^n} = \frac{0,2^{n+1}}{0,2^n} = 0,2^{n+1-n} = 0,2^1 = 0,2$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante, alors la suite est géométrique, de raison 0,2.

2. $u_0 = 5 \times 0,2^0 = 5 \times 1 = 5$

$$u_{10} = 5 \times 0,2^{10} \approx 0,000000512$$

3. Les termes de la suite sont tous positifs, et on multiplie par 0,2 pour passer d'un terme au suivant (puisque la suite est géométrique).

Or, si on multiplie un nombre positif par un nombre compris strictement entre 0 et 1, on trouve un résultat plus petit que le nombre de départ. Donc (u_n) est décroissante.

Autre façon de voir :

$$u_{n+1} - u_n = 5 \times 0,2^{n+1} - 5 \times 0,2^n = 5 \times 0,2^n \times 0,2 - 5 \times 0,2^n = 5 \times 0,2^n \times (0,2 - 1) \quad (\text{on a mis en facteur } 5 \times 0,2^n) .$$

Ainsi : $u_{n+1} - u_n = 5 \times 0,2^n \times (-0,8)$.

Le résultat est négatif, car c'est un produit de facteurs tous positifs sauf un.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite est décroissante.

Exercice 4 :

1. On trouve :

Année	Population d'âge scolaire	Population scolarisée
2000	2 000 000	500 000
2001	2 040 000	620 000
2002	2 080 800	740 000
2003	2 122 416	860 000

2. $\frac{500\,000}{2\,000\,000} = 0,25 = 25\%$.

Le pourcentage de la population scolarisée en 200 est donc de 25 %.

3.

a. Facile. $P_0 = 2\,000\,000$ et $S_0 = 500\,000$.

b. La population d'âge scolaire augmente de 2 % par an.

Or, on sait qu'augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

Ici, $1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1,02$.

Donc, tous les ans, la population d'âge scolaire est multipliée par 1,02.

Traduction : (P_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

On en déduit, d'après la formule du cours : $P_n = P_0 \times q^n$ soit ici : $P_n = 2\,000\,000 \times 1,02^n$.

c. La population scolarisée augmente de 120 000 par an.

Traduction : (S_n) est une suite arithmétique de raison 120 000.

On en déduit, d'après la formule du cours : $S_n = S_0 + r \times n$ soit ici : $S_n = 500\,000 + 120\,000n$.

4. On trouve que c'est **en 2006** que pour la première fois, si l'évolution se poursuit, plus de la moitié de la population d'âge scolaire sera scolarisée.

En effet, on trouve : $P_6 \simeq 2\,252\,325$ et $S_6 = 1\,220\,000$.

Donc : $S_6 > \frac{P_6}{2} \simeq 1\,126\,162$