Correction du devoir surveillé n° 3

1E3 - 4.12.2019

Exercice 1 :

1. Par lecture graphique :
   $f(-3) = 1$
   $f(0) = 1$
   $f(2) = 4$
   $f(4) = -2$
2. On sait que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
   On trouve alors :
   $f'(-3) = 1$
   $f'(0) = 1$
   $f'(2) = 0$ (puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses)
   $f'(4) = -2$.

Exercice 2 :

1. $f : f(x) = 5x + 3$
   $\boxed{f'(x) = 5}$ pour $x \in \mathbb{R}$
2. $g : g(x) = 3x^5 + 2x^4 + x + 3$
   $g'(x) = 3 \times 5x^4 + 2 \times 4x^3 + 1$
   $\boxed{g'(x) = 15x^4 + 8x^3 + 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$
3. $h : h(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$
   $\boxed{h'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
4. $k : k(x) = \dfrac{3}{2} + 5\sqrt{x}$
   $k'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   $\boxed{k'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}}$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$
5. $l : l(x) = x^2\sqrt{x}$
   On pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$
   Alors : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   On applique la formule de dérivation d'un produit : $l' = u'v + uv'$
   On obtient : $l'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   $l'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$
   $l'(x) = \dfrac{4x \times \sqrt{x}^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}}$
   $\boxed{l'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}}$ qu'on peut écrire aussi : $l'(x) = \dfrac{5x\sqrt{x}}{2}$

La question se pose alors de savoir si l est dérivable en 0.

On a : $\dfrac{l(0+h)-l(0)}{h} = \dfrac{h^2\sqrt{h}-0}{h} = h\sqrt{h}$

Donc la limite du taux de variation quand h tend vers 0 existe et on a : $\lim\limits_{h\to 0} h\sqrt{h} = 0$.

Donc $l'(0) = 0$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

6. $m : m(x) = \dfrac{x^2+5x+1}{3x-2}$

   On pose $u(x) = x^2+5x+1$ et $v(x) = 3x-2$

   Alors : $u'(x) = 2x+5$ et $v'(x) = 3$

   On applique la formule de dérivation d'un quotient : $m' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

   On obtient : $m'(x) = \dfrac{(2x+5)(3x-2)-(x^2+5x+1)\times 3}{(3x-2)^2}$ (attention aux parenthèses.)

   $m'(x) = \dfrac{6x^2-4x+15x-10-(3x^2+15x+3)}{(3x-2)^2}$

   $m'(x) = \dfrac{6x^2-4x+15x-10-3x^2-15x-3}{(3x-2)^2}$ (attention aux signes.)

   $\boxed{m'(x) = \dfrac{3x^2-4x-13}{(3x-2)^2}}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

7. $n : n(x) = \sqrt{7x+1}$

   n est une fonction composée ; on a : $n(x) = t(ax+b)$ en posant : $t(x) = \sqrt{x}$, $a = 7$ et $b = 1$.

   On sait alors que : $n'(x) = a \times t'(ax+b)$, c'est à dire : $n'(x) = 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{7x+1}}$

   Ainsi : $\boxed{n'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x+1}}}$ pour $x \in \left]-\dfrac{1}{7}\,;+\infty\right[$

Exercice 3 :

1. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a estr : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

   Ici, $f(x) = \sqrt{x}$, donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   On obtient : $f(4) = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$

   L'équation de la tangente est donc : $y = \dfrac{1}{4}(x-4)+2$, soit : $y = \dfrac{1}{4}x-1+2$ ou : $\boxed{y = \dfrac{1}{4}x+1}$.

2. Lorsque x est voisin de 4, les points d'abscisse x situés respectivement sur la tangente et sur la courbe sont proches l'un de l'autre : donc leurs ordonnées sont proches, ce qui s'écrit :

   $\sqrt{x} \simeq \dfrac{1}{4}x+1$

   Si on pose : $x = 4+h$, ceci peut s'écrire : $\sqrt{4+h} \simeq 2+\dfrac{1}{4}h$

3. $\sqrt{4{,}1} = \sqrt{4+0{,}1} \simeq 2+\dfrac{0{,}1}{4} = 2{,}025$

   Ainsi, $\boxed{\sqrt{4{,}1} \simeq 2{,}025}$

   $\sqrt{3{,}08} = \sqrt{4-0{,}92} \simeq 2-\dfrac{0{,}92}{4} = 1{,}77$

   Ainsi, $\boxed{\sqrt{3{,}08} \simeq 1{,}77}$

   $\sqrt{4{,}0012} = \sqrt{4+0{,}0012} \simeq 2+\dfrac{0{,}0012}{4} = 2{,}0003$

   Ainsi, $\boxed{\sqrt{4{,}0012} \simeq 2{,}0003}$

   La calculatrice donne : $\sqrt{4{,}1} \simeq 2{,}024845673$; $\sqrt{3{,}08} \simeq 1{,}754992877$; $\sqrt{4{,}0012} \simeq 2{,}000299978$.

   Les valeurs approchées obtenues sont donc correctes, et d'autant meilleures que le nombre est proche de 4.