Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

Le plus simple est d'établir le tableau de variation de f et d'en déduire le signe de f' :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate que la courbe correspondant au signe de f' est la courbe $\mathscr{C}_2$.

Exercice 2 :

1. La fabrique produit entre 0 et 200 kg de lessive donc l'ensemble de définition de C est $[0\,;200]$.
2. Chaque kg étant vendu 8 euros, on a : $R(x) = 8x$.
3. $B(x) = R(x) - C(x) = 8x - (0{,}1x^2 - 17x + 1200) = 8x - 0{,}1x^2 + 17x - 1200 = -0{,}1x^2 + 25x - 1200$
4. $B'(x) = -0{,}1 \times 2x + 25 \times 1 + 0 = -0{,}2x + 25$.
5. Étudions le signe de B' en résolvant, par exemple, l'inéquation $B'(x) \geq 0$:
   $B'(x) \geq 0$
   $-0{,}2x + 25 \geq 0$
   $25 \geq 0{,}2x$
   $\dfrac{25}{0{,}2} \geq x$
   $125 \geq x \qquad \text{soit} \qquad x \leq 125$

   On en déduit le tableau :

x	0		125		200
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1200	$\nearrow$	$362{,}5$	$\searrow$	-200

6. D'après le tableau, on constate que la fabrique doit vendre 125 kg de lessive, pour que son bénéfice soit maximum.

Exercice 3 :

1. Le volume $\mathcal{V}$ d'un parallélépipède rectangle est : aire de la base multipliée par la hauteur.
   Ici, la base est un carré de côté x, donc sont aire est x^2.
   On obtient : $\mathcal{V} = x^2 h = 1$. Par conséquent, $h = \dfrac{1}{x^2}$.

2. La brique a 4 faces : deux carrés de côté x et 4 rectangles de côtés x et h.
   L'aire totale est donc : $A(x) = 2x^2 + 4xh$
   Comme on a vu que : $h = \dfrac{1}{x^2}$, on trouve en remplaçant :
   $A(x) = 2x^2 + 4x \times \dfrac{1}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{4x}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$
3. $A'(x) = 2 \times 2x + 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 4x - \dfrac{4}{x^2}$

   Réduisons au même dénominateur :
   $A'(x) = \dfrac{4x \times x^2}{x^2} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 4}{x^2} = \dfrac{4(x^3-1)}{x^2}$
4. On voit que le dénominateur de $A'(x)$ est toujours positif (c'est un carré).
   Comme 4 est positif, le signe du numérateur est le même que le signe de $x^3 - 1$.
   On résout par exemple :
   $x^3 - 1 \geq 0$
   $x^3 \geq 1$ soit : $x^3 \geq 1^3$
   $x \geq 1$ car la fonction cube est strictement croissante (vu en seconde). Donc les antécédents sont dans le même ordre que les images.

   On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$A'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$A(x)$	$\|$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

   D'après le tableau, la valeur de x telle que l'aire des six faces soit minimale est 1 .

   On remarque que dans ce cas, $h = \dfrac{1}{1^2} = 1$, donc les briques sont des cubes.

Exercice 4 :

5. Pour étudier les variations de (u_n), déterminons le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   $u_{n+1} - u_n = -5 \times 3^{n+3} - (-5 \times 3^{n+2}) = -5 \times 3^{n+3} + 5 \times 3^{n+2}$
   Factorisons par 5 :
   $u_{n+1} - u_n = 5(-3^{n+3} + 3^{n+2})$
   Or, $3^{n+3} = 3^{n+2} \times 3$
   Alors :
   $u_{n+1} - u_n = 5(-3^{n+2} \times 3 + 3^{n+2})$
   Factorisons par 3^{n+2} :
   $u_{n+1} - u_n = 5 \times 3^{n+2}(-3+1)$
   $u_{n+1} - u_n = 5 \times 3^{n+2} \times (-2)$
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ est un produit de nombres tous positifs, sauf le dernier. Il est donc négatif.
   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$.
   La suite (u_n) est donc décroissante (strictement).

   Pour étudier les variations de (v_n), on peut déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. On peut aussi remarquer que :

$v_n = f(n)$ si l'on pose : $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

f est une fonction polynôme du second degré. Vu que le coefficient a de x^2 est positif, f est décroissante, puis croissante.

Le minimum est obtenu pour $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{5}{6}$. Le changement de variation se produit donc entre 0 et 1.
Calculons les premiers termes de la suite : $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et $v_2 = 3$. Ainsi : $v_1 < v_0$ et $v_2 > v_1$.

On voit que la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante. En revanche, d'après l'étude de la fonction f, on constate qu'elle est croissante à partir du rang $n = 1$.

2. La formule définissant (u_n) laisse penser qu'elle n'est pas arithmétique, mais qu'elle est géométrique. Vérifions-le.

$u_0 = -5 \times 3^2 = -45$; $u_1 = -5 \times 3^3 = -135$ et $u_2 = -5 \times 3^4 = -405$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
D'autre part, $u_n = -5 \times 3^{n+2} = -5 \times 3^2 \times 3^n = u_0 \times 3^n$, de la forme : $u_n = u_0 \times q^n$.

Cette formule est celle qui définit le terme général d'une suite géométrique.
Autre méthode : on peut aussi calculer le quotient de deux termes consécutifs.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-5 \times 3^{n+3}}{-5 \times 3^{n+2}}$
Simplifions par -5 :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+3}}{3^{n+2}}$
Utilisons les propriétés des puissances :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^n \times 3^3}{3^n \times 3^2}$
Simplifions par 3^n :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^3}{3^2} = 3$
On a donc pour tout n : $u_{n+1} = 3u_n$, donc (u_n) est géométrique.

Bilan : (u_n) n'est pas arithmétique, mais elle est géométrique.

Le calcul des premiers termes de (v_n), fait à la question précédente, montre que :
$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$, donc (v_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$, donc (v_n) n'est pas géométrique.

Bilan : (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Une remarque en passant :

Il peut se faire qu'une suite soit à la fois arithmétique et géométrique, mais c'est un cas très particulier.

En effet, soit (u_n), une suite arithmétique de raison r et géométrique de raison q.

On a donc pour tout n : $u_{n+1} = q \times u_n = u_n + r$

On en déduit : $qu_n - u_n = r$ soit : $(q-1)u_n = r$.

Supposons $q \neq 1$; alors en divisant par $(q-1)$, on obtient : $u_n = \dfrac{r}{q-1}$. Ainsi u_n est toujours égal au même nombre, mais dans ce cas, on a $q = 1$, ce qui contredit ce que nous avons supposé.

Donc q est forcément égal à 1. Dans ce cas : $r = (1-1)u_n = 0$.

Ainsi, pour tout n : $u_{n+1} = 1 \times u_n = u_n + 0 = u_n$.

Conclusion : les seules suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques sont les suites constantes.