Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. C'est la courbe $\mathcal{C}_3$ qui représente f', comme le montre le tableau suivant :

x		1		4	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_3$ au point d'abscisse 1, c'est à dire T_1. On voit que ce coefficient directeur est 0. Donc, $f'(1) = 0$.
   $f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_3$ au point d'abscisse 5, c'est à dire T_5. On voit que ce coefficient directeur est 4. Donc, $f'(5) = 4$.

Exercice 2 :

1. $f : f(x) = 2x^5 + 3x^2 + x$
   $f'(x) = 2 \times 5x^4 + 3 \times 2x + 1$
   $f'(x) = 10x^4 + 6x + 1$
2. $g : g(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$
   $g'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$
   $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$
3. $h : h(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{2x - 3}$
   On pose : $u(x) = 5x^2 + 1$ et $v(x) = 2x - 3$
   On en déduit : $u'(x) = 10x$ et $v'(x) = 2$
   On a : $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, donc : $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
   $h'(x) = \dfrac{10x(2x-3) - (5x^2+1) \times 2}{(2x-3)^2}$
   $h'(x) = \dfrac{20x^2 - 30x - 10x^2 - 2}{(2x-3)^2}$
   $h'(x) = \dfrac{10x^2 - 30x - 2}{(2x-3)^2}$
4. $k(x) = (x^3 + x + 1)\sqrt{x}$
   On pose : $u(x) = x^3 + x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$
   On en déduit : $u'(x) = 3x^2 + 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   Comme $k(x) = u(x)v(x)$, alors $k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
   $k'(x) = (3x^2 + 1)\sqrt{x} + (x^3 + x + 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$k'(x) = (3x^2+1)\sqrt{x} \times \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3+x+1}{2\sqrt{x}}$

$k'(x) = \frac{(3x^2+1)\times 2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3+x+1}{2\sqrt{x}}$

$k'(x) = \frac{2x(3x^2+1)+(x^3+x+1)}{2\sqrt{x}}$

$k'(x) = \frac{6x^3+2x+x^3+x+1}{2\sqrt{x}}$

$k'(x) = \frac{7x^3+3x+1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3 :

1. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 72$
2. f' est un trinôme du second degré, donc du signe de a sauf entre les racines.
   $6x^2 - 6x - 72 = 6(x^2 - x - 12)$ donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$
   Ici : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$
   $x_1 = \frac{1-\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{49}}{2\times 1} = \frac{8}{2} = 4$
   Donc f' est positive sauf entre -3 et 4.
3. Le tableau :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	137	$\searrow$	-206	$\nearrow$	

4. $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
   $f'(2) = -60\,;\ f(2) = -138$
   Donc : $T : y = -60(x-2) - 138 = -60x + 120 - 138$
   $T : y = -60x - 18$

Exercice 4 :

1. (PM) et (AC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{\text{BM}}{\text{BC}} = \frac{\text{PM}}{\text{AC}}$
   $\frac{x}{5} = \frac{\text{PM}}{4}$, donc : $\text{PM} = \frac{4}{5}x$

   (QM) et (AB) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{\text{CM}}{\text{CB}} = \frac{\text{QM}}{\text{AB}}$
   $\frac{(5-x)}{5} = \frac{\text{QM}}{3}$, donc : $\text{QM} = \frac{3}{5}(5-x)$
2. L'aire de APMQ est : $\text{AP} \times \text{PM} = \frac{3}{5}(5-x) \times \frac{4}{5}x = \frac{12}{25}x(5-x)$
3. $f(x) = \frac{12}{25}(5x - x^2)$ donc : $f'(x) = \frac{12}{25}(5-2x)$
   On obtient le tableau :

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

On voit qu'il faut placer M au milieu de [BC] pour que l'aire du rectangle APMQ soit maximale.