Correction du devoir surveillé nº3

Exercice 1 :

1) On trace approximativement la tangente au point d'abscisse 0. Cette droite « descend » en gros de 3 carreaux lorsqu'on se déplace de 2 carreaux vers la droite. Son coefficient directeur est donc environ $-\frac{3}{2}$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est par définition $f'(0)$.

On peut donc conclure : $f'(0) \cong -\frac{3}{2} = -1{,}5$.

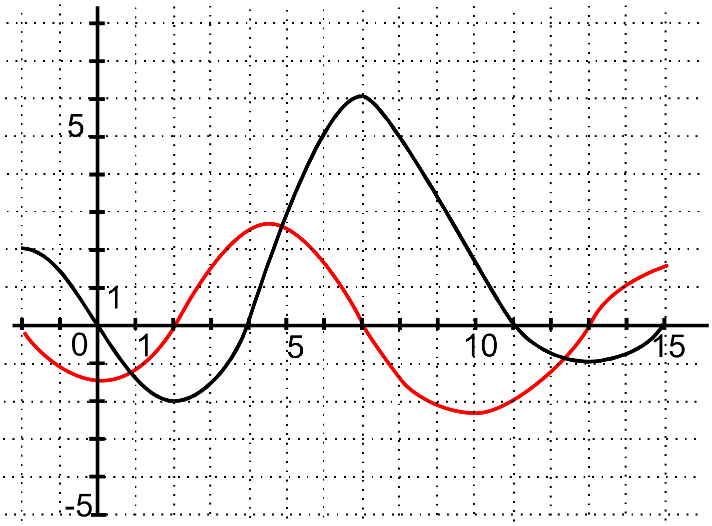
2) $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Il est égal à 0 lorsque cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. On cherche donc les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ; puis on détermine l'abscisse de ces points.

Ici, il y a 3 points qui satisfont à cette condition. On trouve alors : $f'(x) = 0$ pour $x \cong 2$; $x \cong 7$; $x \cong 13$.

3) La fonction représentée est négative lorsque f est décroissante et positive lorsque f est croissante.

Par ailleurs, l'image de 0 est environ –1,5 ; de plus, 2, 7 et 13 ont pour image 0.

Une courbe possible :



Exercice 2 :

f est un polynôme, donc on dérive chaque terme séparément et on ajoute :

$f'(x) = 3\times 5x^{5-1} + 4\times 2x^2 - 1 + 0 = 15x^4 + 8x$. f' est définie sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme.)

$g(x)$ se présente comme un produit : posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$. Alors $g(x) = u(x)v(x)$.

Par conséquent, d'après le cours : $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$; donc : $g'(x) = 2x\cos(x) + x^2 \times (-\sin(x)) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

On voit que g' est définie sur $\mathbb{R}$ (pas de quotient, pas de racine...)

$h(x)$ se présente comme un quotient : posons $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x^2 - 2$. Alors $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

Alors, d'après le cours : $h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

On a : $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 2x$; donc : $h'(x) = \frac{\cos(x)(x^2-2) - \sin(x)\times 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{(x^2-2)\cos(x) - 2x\sin(x)}{(x^2-2)^2}$

Il n'y a pas de réelle simplification possible. On laisse comme ça.

On voit que $x^2 - 2$ doit être différent de 0, donc x doit être différent de $-\sqrt{(2)}$ et $\sqrt{(2)}$.

Ainsi, h' est définie sur $\left]-\infty ; -\sqrt{(2)}\right[\cup \left]-\sqrt{(2)} ; \sqrt{(2)}\right[\cup \left]\sqrt{(2)} ; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{(2)} ; \sqrt{(2)}\right\}$

$k(x)$ est de la forme $u(ax+b)$. En effet, $k(x)$ se décompose de la façon suivante : $x \to 5x-2 \to \sqrt{5x-2}$.

Posons : $u(x)=\sqrt{x}$. Alors on a : $k(x)=u(5x-2)$. D'après le cours, ceci entraîne : $f'(x)=5u'(5x-2)$.

Or : $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $u'(5x-2)=\dfrac{1}{2\sqrt{5x-2}}$. On en déduit : $f'(x)=5\times\dfrac{1}{2\sqrt{5x-2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$.

Ici, il y a deux contraintes : pour que $\sqrt{5x-2}$ existe, $5x-2$ doit être positif ; de plus, le dénominateur doit être différent de 0 donc $5x-2$ doit être différent de 0.

En résumé, on doit avoir : $5x-2>0$, ce qui équivaut à : $x>\dfrac{2}{5}$.

Donc, k' est définie sur $\left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.

Exercice 3 :

1) $\sqrt{1+x}$ existe si $1 + x$ est positif, soit $x \geqslant -1$. Donc f est définie sur $[-1 ; +\infty[$.

2) Même méthode que pour la fonction k de l'exercice 2. On décompose $f(x)$ ainsi : $x \to 1+x \to \sqrt{1+x}$.

Posons : $u(x)=\sqrt{x}$. Alors $f(x)=u(1+x)$. Donc $f'(x)=1\times u'(1+x)$

$u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $u'(1+x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Conclusion : $f'(x)=1\times\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

On voit qu'ici, $1 + x$ doit être positif, mais aussi différent de 0, puisque $\sqrt{1+x}$ se trouve au dénominateur.

Donc $1 + x > 0$ soit $x > -1$.

f' est donc définie sur $]-1 ; +\infty[$. Ici f' n'est pas définie sur le même ensemble que f.

3) L'équation de la tangente T_0 en 0 est : $T_0 : y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

On calcule : $f(0)=1$ et $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. Donc $T_0 : y=\dfrac{1}{2}(x-0)+1=\dfrac{1}{2}x+1$.

On sait qu'aux alentours du point de contact, la courbe et la tangente sont pratiquement confondues. Considérons alors les points B et C de même abscisse x, B situé sur $\mathscr{C}_f$ et C sur T_0.

Les coordonnées sont donc : B(x ; $f(x)$) et C $\left(x;\dfrac{1}{2}x+1\right)$. Si x est très proche de 0, les points B et C sont pratiquement confondus, donc leurs ordonnées sont très voisines l'une de l'autre.

On a par conséquent $\sqrt{1+x}\simeq 1+\dfrac{1}{2}x$ lorsque x est assez proche de 0. Par exemple : $\sqrt{2}\approx\dfrac{3}{2}$.

Exercice 4 :

On voit que sur l'intervalle $[-4 ; -3]$, f_2 est croissante alors que f_1 est négative. Il est donc exclut que f_1 soit la dérivée de f_2. C'est donc f_2 qui est la dérivée de f_1. On peut vérifier que cela concorde :

Sur $]-5 ; -3[$, f_1 est décroissante et f_2 est négative.

Sur $]-3 ; 0[$, f_1 est croissante et f_2 est positive.

Sur $]0 ; 3[$, f_1 est décroissante et f_2 est négative.

Sur $]3 ; 5[$, f_1 est croissante et f_2 est positive.