Correction du devoir surveillé nº 5

Exercice 1:

- 1. La courbe qui représente la dérivée f' est \mathcal{C}_3 . Il suffit de remarquer que f change trois fois de variations. La fonction dérivée f' doit donc changer 3 fois de signe.
- 2. $f'(-1) = -\frac{3}{2}$ et f'(3) = 0. On peut considérer les tangentes dessinée avec la courbe \mathcal{C}_f ou les images de -1 et 3 par la fonction f' représentée par la courbe \mathcal{C}_3 .

Exercice 2:

- 1. $f: f(x) = 5x^4 + 3x + 1$ $f'(x) = 5 \times 4x^3 + 3 \times 1 = 20x^3 + 3$
- 2. $g: g(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{3}$ $g'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- 3. $h:h(x) = \frac{x^2 + 5}{x 2}$ On pose: $u(x) = x^2 + 5$ et $v(x) = x - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{x^2 + 5}$

On pose : $u(x) = x^2 + 5$ et v(x) = x - 2. Donc : u'(x) = 2x et v'(x) = 1. Alors : $h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2x(x-2) - (x^2 + 5)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 5}{(x-2)^2}$

$$h'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$$

4. $k(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

On pose : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors u'(x) = 2x et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi : $k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \sqrt{x} + (x^2 + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x \times \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x \times 2\sqrt{x}^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$

$$k'(x) = \frac{4x^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice 3:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

L'équation de \mathcal{F}_a est donc : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$

On obtient
$$\mathcal{T}_a: y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

2. B appartient à l'axe des ordonnées, donc $x_B = 0$. Donc $y_B = -\frac{0}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$.

C appartient à l'axe des abscisses, donc $y_{\rm C} = 0$. Donc $-\frac{x_{\rm C}}{a^2} + \frac{2}{a} = 0$.

On multiplie la ligne par a^2 , on obtient : $-x_C + 2a = 0$, soit : $x_C = 2a$.

Ainsi: $B\left(0;\frac{2}{a}\right)$ et C(2a;0)

3. Comme les coordonnées de B et C sont positives, l'aire du triangle OBC est : $\frac{OB \times OC}{2} = \frac{\frac{2}{a} \times 2a}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

L'aire de OBC est bien indépendante de a

Exercice 4:

1. D'après le schéma, la hauteur de la boîte est 24-2x, la largeur est x et la longueur L est telle que : 2L+2x=24 donc L=12-x.

Le volume est donc : $V(x) = x(24 - 2x)(12 - x) = x(288 - 48x + 2x^2) = 288x - 48x^2 + 2x^3 = 2x^3 - 48x^2 + 288x$.

- 2. $V'(x) = 2 \times 3x^2 48 \times 2x + 288 \times 1 = 6x^2 96x + 288$ $V'(x) = 6(x^2 - 16x + 48)$.
- 3. V'(x) est du signe de $x^2 16x + 48$.

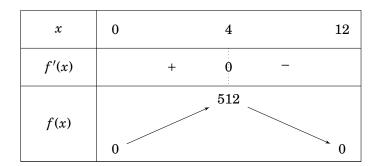
C'est une expression du second degré; il n'y a pas de factorisation évidente.

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \times 1 \times 48 = 64.$$

$$\Delta > 0$$
, donc il y a deux racines : $x_1 = \frac{16 - \sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{16 + \sqrt{64}}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

Le signe de $x^2 - 16x + 64$ est celui de a, donc positif, sauf entre les racines 4 et 12.

On obtient donc le tableau :



4. D'après le tableau, le volume de la boîte est maximal pour x = 4 cm; le volume maximal est de 512 cm³.