Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. La courbe qui représente la dérivée f' est $\mathscr{C}_3$. Il suffit de remarquer que f change trois fois de variations. La fonction dérivée f' doit donc changer 3 fois de signe.

2. $f'(-1) = -\dfrac{3}{2}$ et $f'(3) = 0$. On peut considérer les tangentes dessinée avec la courbe $\mathscr{C}_f$ ou les images de -1 et 3 par la fonction f' représentée par la courbe $\mathscr{C}_3$.

Exercice 2 :

1. $f : f(x) = 5x^4 + 3x + 1$
   $f'(x) = 5 \times 4x^3 + 3 \times 1 = 20x^3 + 3$
2. $g : g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}$
   $g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. $h : h(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$
   On pose : $u(x) = x^2 + 5$ et $v(x) = x - 2$. Donc : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$.
   Alors : $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{2x(x-2) - (x^2+5)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - x^2 - 5}{(x-2)^2}$
   $h'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$
4. $k(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$
   On pose : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Ainsi : $k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \sqrt{x} + (x^2+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x \times \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x \times 2\sqrt{x}^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$
   $k'(x) = \dfrac{4x^2 + x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 3 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   L'équation de $\mathscr{T}_a$ est donc : $y = f'(a)(x-a) + f(a) = -\dfrac{1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{a}{a^2} + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a}$
   On obtient $\mathscr{T}_a : y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}$
2. B appartient à l'axe des ordonnées, donc $x_B = 0$. Donc $y_B = -\dfrac{0}{a^2} + \dfrac{2}{a} = \dfrac{2}{a}$.
   C appartient à l'axe des abscisses, donc $y_C = 0$. Donc $-\dfrac{x_C}{a^2} + \dfrac{2}{a} = 0$.
   On multiplie la ligne par a^2, on obtient : $-x_C + 2a = 0$, soit : $x_C = 2a$.
   Ainsi : $B\left(0 ; \dfrac{2}{a}\right)$ et $C(2a ; 0)$
3. Comme les coordonnées de B et C sont positives, l'aire du triangle OBC est : $\dfrac{OB \times OC}{2} = \dfrac{\frac{2}{a} \times 2a}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.
   L'aire de OBC est bien indépendante de a.

Exercice 4 :

1. D'après le schéma, la hauteur de la boîte est $24-2x$, la largeur est x et la longueur L est telle que : $2L+2x=24$ donc $L=12-x$.

   Le volume est donc : $V(x)=x(24-2x)(12-x)=x(288-48x+2x^2)=288x-48x^2+2x^3=2x^3-48x^2+288x$.

2. $V'(x)=2\times 3x^2-48\times 2x+288\times 1=6x^2-96x+288$

   $V'(x)=6(x^2-16x+48)$.

3. $V'(x)$ est du signe de $x^2-16x+48$.

   C'est une expression du second degré ; il n'y a pas de factorisation évidente.

   $\Delta=(-16)^2-4\times 1\times 48=64$.

   $\Delta>0$, donc il y a deux racines : $x_1=\dfrac{16-\sqrt{64}}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ et $x_2=\dfrac{16+\sqrt{64}}{2}=\dfrac{24}{2}=12$.

   Le signe de $x^2-16x+64$ est celui de a, donc positif, sauf entre les racines 4 et 12 .

   On obtient donc le tableau :

x	0		4		12
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	512	$\searrow$	0

4. D'après le tableau, le volume de la boîte est maximal pour $x=4$ cm ; le volume maximal est de 512 cm^3 .