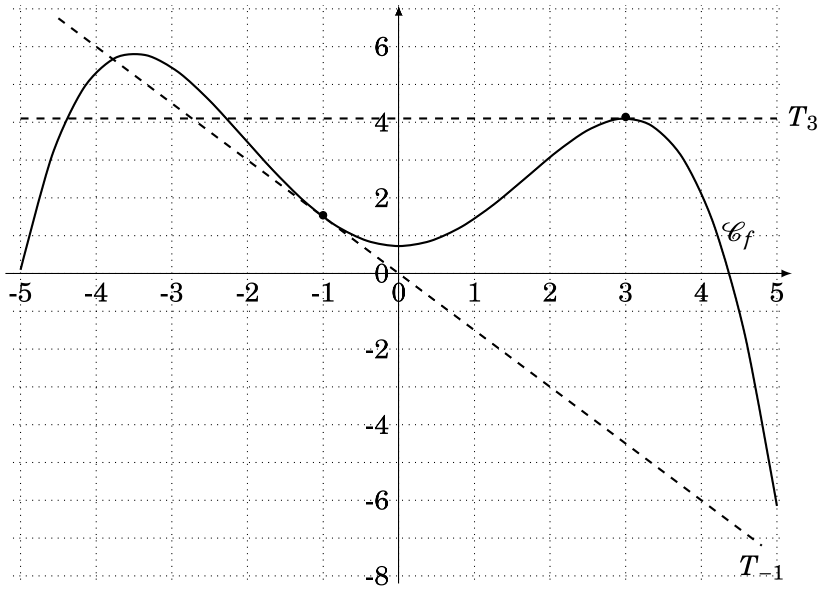
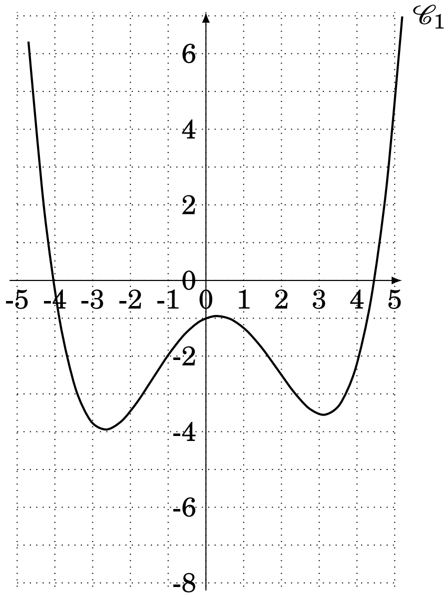
Mathématiques - Devoir surveillé n° 5

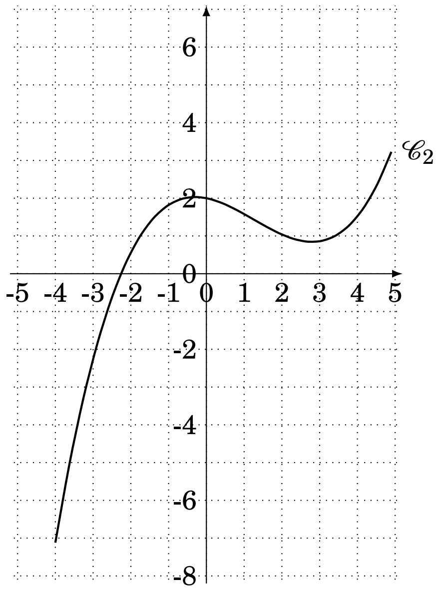
Exercice 1 (4 points) :

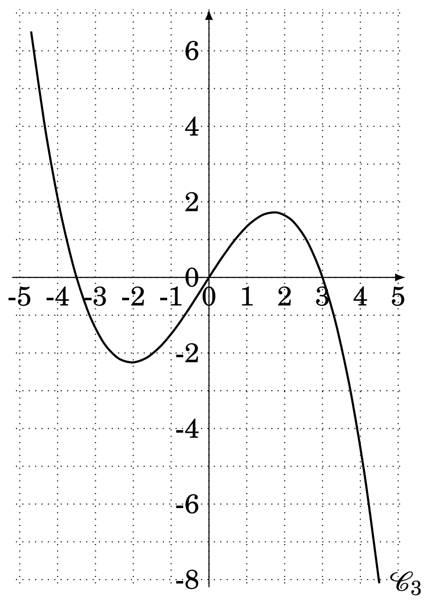
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-5\,;5]$. On a dessiné la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 et la tangente T_3 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.



1. Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui représente la dérivée f' de f ? (Justifier.)







2. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(3)$ (justifier.)

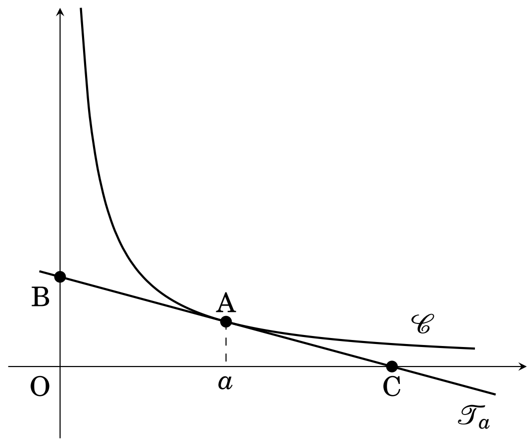
Exercice 2 (6 points) :

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : f(x) = 5x^4 + 3x + 1$
2. $g : g(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}$
3. $h : h(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$
4. $k(x) = (x^2+1)\sqrt{x}$

Exercice 3 (5 points) :

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
Soit A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a \in]0\,;+\infty[$.

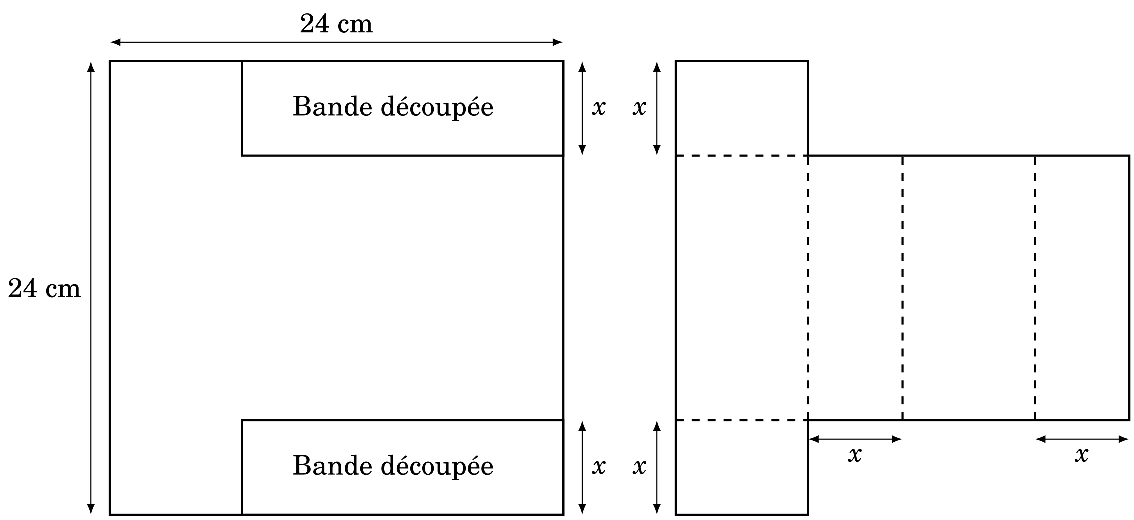


1. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}_a$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
2. Déterminer en fonction de a les coordonnées de B et C, les points d'intersection de $\mathscr{T}_a$ avec l'axe des ordonnées et avec l'axe des abscisses respectivement.
3. Montrer que le triangle OBC a une aire constante, indépendante de a.

Exercice 4 (5 points) :

Un fabriquant envisage la production de briques de jus de fruit en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.

Le côté de la feuille carrée mesure 24 cm. et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 \leq x \leq 12$.



1. Démontrer que le volume (en cm³) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 48x^2 + 288x$.
2. Calculer $V'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction V.
4. Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal.