Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 (5 points) :

1. À partir de la courbe, on dresse le tableau de variation de f, puis on en déduit les variations de f' :

x	-4		$-2{,}5$		$0{,}8$		$4{,}2$		6
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Parmi les trois courbes, celle qui représente f' est la première, car les signes correspondent.
   La courbe 2 représente une fonction qui change une seule fois de signe, la courbe 3 une fonction qui change quatre fois de signe.
2. Graphiquement $f'(0) = 2$: c'est le coefficient diredteur de la tangente T_0.
   De même, $f'(4) = -1$: c'est le coefficient directeur de la tangente T_4.
3. La droite T_4 a pour coefficient directeur -1 d'après la question précédente. D'autre part, on voit qu'elle passe par le point de coordonnées $(0\,;-3)$.
   On en déduit l'équation de T_4 : $y = -x - 3$.

Exercice 2 (5 points) :

1. $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 3 \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
   On remarque que $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ est une constante.
   Donc : $f'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 0$
   Ainsi : $\boxed{f' = -\dfrac{3}{x^2}}$
2. $g(x) = x^3\sqrt{x}$
   g se présente comme un produit.
   On pose : $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a alors : $g(x) = u(x) \cdot v(x)$.
   Alors, d'après le cours : $g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
   $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'après le tableau.
   On obtient : $g'(x) = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   $$g'(x) = \frac{3x^2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

   $$g'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

   $$g'(x) = \frac{6x^2 \times x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

   $$g'(x) = \frac{6x^3}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{6x^3 + x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{7x^3}{2\sqrt{x}}}$$

3. $h(x) = \dfrac{x^4 + 5x^2}{3x - 1}$

   La fonction se présente sous la forme d'un quotient.

   On pose : $u(x) = x^4 + 5x^2$ et $v(x) = 3x - 1$. On a alors : $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

   Alors, d'après le cours : $g'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

   $u'(x) = 4x^3 + 5 \times 2x = 4x^3 + 10x$ et $v'(x) = 3$ d'après le tableau.

   Ainsi : $h'(x) = \dfrac{(4x^3 + 10x)(3x - 1) - (x^4 + 5x^2) \times 3}{(3x - 1)^2}$

   $$h'(x) = \frac{(12x^4 + 30x^2 - 4x^3 - 10x) - (3x^4 + 15x^2)}{(3x - 1)^2}$$

   $$h'(x) = \frac{12x^4 + 30x^2 - 4x^3 - 10x - 3x^4 - 15x^2}{(3x - 1)^2}$$

   $$\boxed{h'(x) = \frac{9x^4 - 4x^3 + 15x^2 - 10x}{(3x - 1)^2}}$$

Exercice 3 (5 points) :

1. $f'(x) = 3x^2 + 6 \times 2x - 15 = 3x^2 + 12x - 15$.
2. f' est un trinôme. On calcule : $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times (-15) = 144 + 180 = 324$.

   Δ est strictement positif ; donc, il y a deux racines :

   $$x_1 = \frac{-12 - \sqrt{324}}{2 \times 3} = \frac{-12 - 18}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

   $$x_2 = \frac{-12 + \sqrt{324}}{2 \times 3} = \frac{-12 + 18}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

   D'après le cours sur le second degré, f' est du signe de 3, donc positif, sauf entre les racines.
3. On obtient le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

4. On a : $f(3) = 37$ et $f'(3) = 48$.

   Donc la tangente T_A à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 3 a pour équation : $y = 48(x - 3) + 37$.

   On obtient en développant : $\boxed{T_A : y = 48x - 107}$.

Exercice 4 (5 points) :

1. On applique le théorème de Thalès dans le triangle BAC :

   Comme (PM) est parallèle à (AC), alors $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{PM}{AC}$.

   Donc $PM = AC \times \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{4x}{5}$

   Comme (QM) est parallèle à (AB), alors $\dfrac{QM}{AB} = \dfrac{CM}{CB}$.

   Donc $QM = AB \times \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{3(5-x)}{5}$

2. L'aire de $APMQ$ est $PM \times QM = \dfrac{4x}{5} \times \dfrac{3(5-x)}{5} = \dfrac{12}{25}x(5-x)$.

3. En développant, on écrit $f(x) = \dfrac{12}{25}(5x - x^2)$.
   Par conséquent, $f'(x) = \dfrac{12}{25}(5 - 2x)$.
   Le signe de $f'(x)$ s'étudie facilement.
   $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 2x \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} \geq x$, soit $x \leq \dfrac{5}{2}$.
   On obtient le tableau :

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

   On voit que l'aire de $APMQ$ est maximale lorsque $x = \dfrac{5}{2}$, c'est à dire lorsque M est le milieu de $[BC]$.
   Dans ce cas, cette aire vaut 3.
   On peut remarquer que c'est la moitié de l'aire du triangle ABC...