Dérivation

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, et $\mathcal{C}$ désigne sa courbe représentative.

1 Taux d'accroissement d'une fonction

Définition 1

Soient a et b deux nombres réels dans I ($a < b$). On appelle **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et b, le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Par exemple, soit f la fonction carré $x \longmapsto x^2$.

Le taux d'accroissement de f entre $a = 2$ et $b = 3$ est : $\dfrac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \dfrac{9 - 4}{1} = 5$.

Interprétation graphique : Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a et b.

Le taux d'accroissement de la fonction f entre deux réels a et b, $a < b$, est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

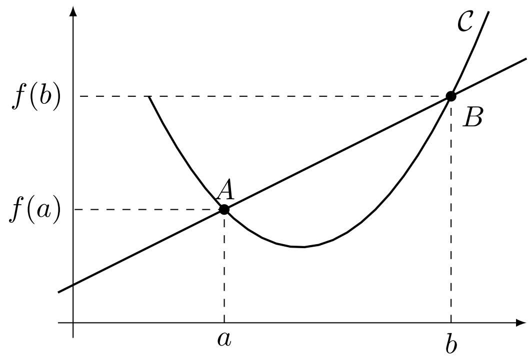


Figure 1

2 Nombre dérivé

Soit $a \in I$, et soit h un nombre réel tel que $a + h \in I$.

Notons $t(h)$ le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$: $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Définition 2

Si, lorsque le nombre h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux d'accroissement $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus proches d'un nombre l, alors on dira que la fonction f est dérivable en a, et que le nombre l est **le nombre dérivé** de f en a. On note (lorsqu'il existe), ce nombre dérivé $f'(a)$.
Formellement, on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ce qui signifie : « $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ »

Exemple :

Soit f la fonction carré $x \longmapsto x^2$. On calcule :

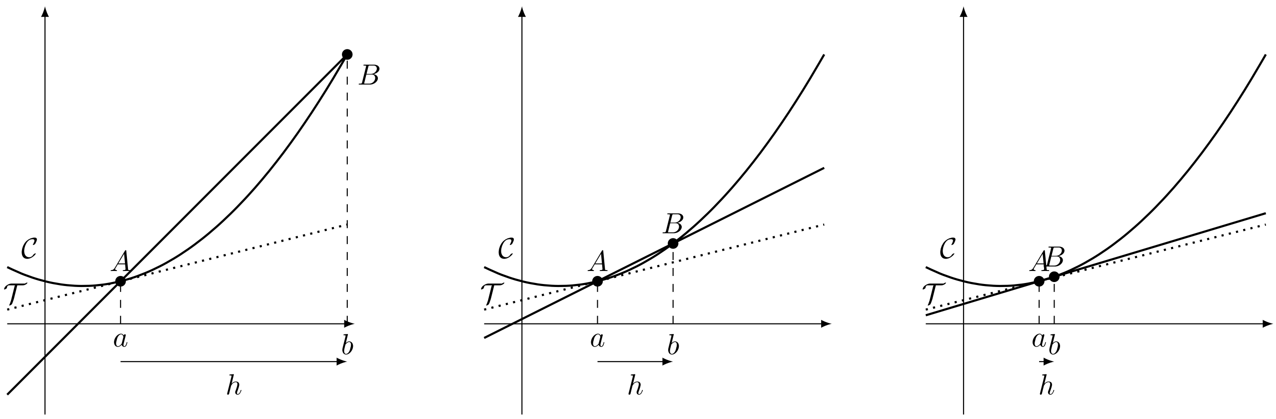
$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux d'accroissement $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 2. La fonction f est donc dérivable en $a = 1$, et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

3 Interprétation graphique : tangente à une courbe

Partons de la figure 1 et posons : $h = b - a$. On a vu que le taux d'accroissement $t(h)$ est le coefficient directeur de la droite (AB). Quand h tend vers 0, le point B se rapproche infiniment du point A. Ainsi, la droite (AB) tend vers une position limite qu'on appelle la **tangente** en A à la courbe $\mathcal{C}$.

Illustration : Quand h tend vers 0, la droite (AB) se rapproche de la droite $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}$ en A.



Définition 3

Supposons que la fonction f soit dérivable en $a \in I$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1

L'équation réduite de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

4 Fonction dérivée

Définition 4

Si la fonction f est dérivable pour tout $a \in I$, alors on dit que f est **dérivable** sur I, et la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f, notée f'.

Exemple :

Reprenons la fonction carré : $f(x) = x^2$. Prenons un nombre réel a quelconque, et cherchons à déterminer, si c'est possible, le nombre dérivé de f en a :

$t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = 2a+h.$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$.

Ainsi f est dérivable en tout nombre réel a, et $f'(a) = 2a$.

5 Dérivées usuelles

Si on a $f(x) = \ldots$	alors f est dérivable sur ...	et $f'(x) = \ldots$
k (nombre réel)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, u' et v' leur dérivée.

Soit k un nombre réel.

Si on a $f(x) = \ldots$	alors $f'(x) = \ldots$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$k \times u(x)$	$k \times u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$ (avec $v(x) \neq 0$)	$-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (avec $v(x) \neq 0$)	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

7 Application de la dérivation à l'étude du sens de variation d'une fonction

L'idée est qu'autour du point de contact, la courbe et la tangente ont le même comportement. Si la fonction est croissante, sa courbe « monte », la tangente aussi, donc son coefficient directeur, le nombre dérivé, est positif. Si la fonction est décroissante, alors par le même mécanisme, le coefficient directeur est négatif.

Théorème 1

Soit f une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 1 : Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x - 8$.

On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Remarque : dans cet exemple, on peut répondre à la question sans utiliser la dérivée, à partir des propriétés des trinômes. En général, on utilise la dérivée quand on ne sait pas faire autrement.

Exemple 2 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+3}$.

On voit que -3 est une valeur interdite. Ainsi, f est définie et dérivable sur $]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

On calcule : $f'(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{(x+3)^2} = \dfrac{(x-1)(x+7)}{(x+3)^2}$.

Le signe de f' est le même que celui du numérateur, car le dénominateur est un carré, donc toujours positif.

Le numérateur est un trinôme du second degré, donc du signe de a sauf entre les racines. Ici, $a = 1$ et les racines sont -7 et 1.

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		-7		-3		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\nearrow$	-14	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$