Géométrie plane

1 Rappel sur les vecteurs

1.1 Définition

Définition 1

Un vecteur est un objet mathématique défini par sa direction, son sens et sa longueur (qu'on appelle norme). Un couple (A,B) de points du plan détermine un unique vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$. La direction de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB), son sens est de A vers B et sa norme est la longueur AB.
Il y a équivalence entre :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati)
- $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$. Ainsi, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

On appelle **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$ le vecteur dont la norme vaut 0. Il n'a ni direction, ni sens.

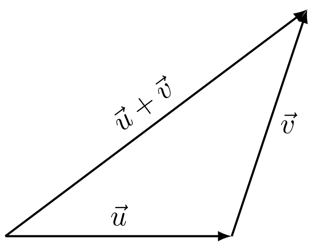
Remarque :

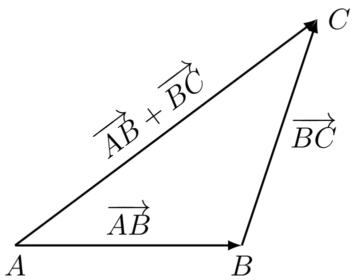
Pour tout point A du plan, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et, d'autre part, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ implique $A = B$.

1.2 Somme de deux vecteurs.

Construction :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs. On construit le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ en plaçant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ « bout à bout, dans le sens des flèches », comme le montre le schéma suivant :





Cette construction équivaut à la **relation de Chasles** :

Soient A,B,C, trois points du plan. On a : $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$.

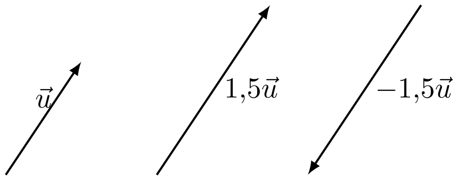
Les propriétés de la somme de deux vecteurs sont les mêmes que pour la somme de deux nombres, le zéro étant remplacé par le vecteur nul.

Le **vecteur opposé** à $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même norme que $\vec{u}$, mais le sens opposé. On a ainsi : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

1.3 Produit d'un vecteur par un nombre

Construction :

Cas général : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul.
- Si $k > 0$, $k\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même sens que $\vec{u}$, et pour norme $k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$, $k\vec{u}$ est le vecteur opposé à $|k|\vec{u}$. Son sens est donc opposé à celui de $\vec{u}$.



Remarque importante : s'ils ne sont pas nuls, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont toujours la **même** direction.

Cas particulier : Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $k = 0$, alors $k\vec{u} = \overrightarrow{0}$.

Les propriétés du produit d'un vecteur par un nombre sont en gros les mêmes que pour le produit de deux nombres.

En particulier, soient a et b deux nombres, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Alors : $a\vec{u} + b\vec{u} = (a+b)\vec{u}$ et $a\vec{u} + a\vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v})$.

1.4 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un nombre.

Vu la remarque précédente, on en déduit la propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Application :

Soient A, B, C et D quatre points (distincts).

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

1.5 Coordonnées d'un vecteur

Définition :

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspondent au « décalage » suivant la direction de l'axe des abscisse et suivant la direction de l'axe des ordonnées qui permet de passer de A à B.

Si A et B ont pour coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}(x_B - x_A \,;\, y_B - y_A)}$$

Somme et produit par un nombre :

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Alors :

- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$;
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.

Conséquence : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

2 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Propriété 1

> Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs.
> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\boxed{xy' - x'y = 0}$.

Démonstration :

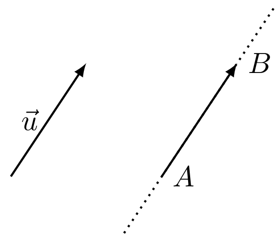
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
C'est équivalent (règle du produit en croix) à : $xy' = x'y$, soit : $xy' - x'y = 0$. ■

3 Vecteur directeur d'une droite - Équation cartésienne

3.1 Vecteur directeur

Définition 2

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\mathscr{D}$ une droite. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



On voit que $\vec{u}$ et (AB) ont bien la même direction. Ainsi, on peut, de façon équivalente, déterminer une droite par deux points (non confondus) ou par un point et un vecteur directeur.

La droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

3.2 Application : équation cartésienne d'une droite

Propriété 2

Soient a, b, c, trois nombres réels, avec a et b non nuls simultanément.
L'équation $ax+by+c = 0$ définit une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$. Réciproquement, toute droite peut-être définie par une équation de ce type.

Démonstration : Soit $A(x_A;y_A)$ (fixé) et $M(x;y)$ (variable), deux points dont les coordonnées vérifient : $ax+by+c = 0$.
Alors par soustraction ligne à ligne, on obtient : $ax + by + c - ax_A - by_A - c = 0$, soit : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
On remarque que $x-x_A$ et $y-y_A$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Si on pose $\vec{u}(-b\,;a)$, on voit que les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et celles de $\vec{u}$ vérifient la relation $xy' - x'y = 0$ de la propriété 1, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
Par conséquent, M appartient à la droite définie par A et $\vec{u}$.
Réciproquement, si M appartient à la droite définie par A et $\vec{u}$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc on peut appliquer la propriété 1, et on trouve : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. En développant, on obtient $ax + by - ax_A - by_A = 0$ et il suffit de poser $c = -ax_A - by_A$ pour retrouver l'équation $ax + by + c = 0$. ■

Remarque :

Pour une droite donnée, les coefficients a, b, c ne sont pas déterminés de manière unique. En effet, pour tout nombre $k \neq 0$, l'équation $(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$ a exactement le même ensemble de solutions que $ax + by + c = 0$.

Ainsi, à une droite donnée correspond, non pas une, mais une infinité d'équations de ce type. On ne dira donc pas « l'équation cartésienne » de $\mathscr{D}$, mais « une équation cartésienne » de $\mathscr{D}$. C'est une différence importante avec l'équation réduite, vue en seconde.

On peut le comprendre aussi en remarquant que si une droite admet pour vecteur directeur $\vec{u}(x;y)$, alors tout vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(kx;ky)$ est aussi un vecteur de cette droite (car il est colinéaire à $\vec{u}$.)

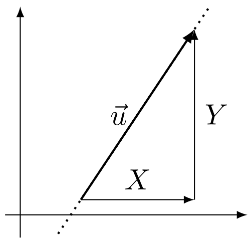
3.3 Lien avec le coefficient directeur

Soit $\mathscr{D}$ une droite « non verticale » définie par A et $\vec{u}$. Soit $y = mx + p$, son équation réduite.

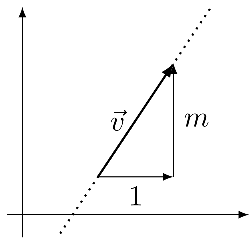
Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On sait que le coefficient directeur m s'obtient par la formule : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Or, $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ sont les coordonnées de $\vec{u}$.

Ainsi, si $\vec{u}(X; Y)$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ (« non verticale »), alors le coefficient directeur s'obtient directement en calculant $\dfrac{Y}{X}$.

En particulier, si m est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$, alors $\vec{v}(1; m)$ en est un vecteur directeur.



$$m = \frac{Y}{X}$$



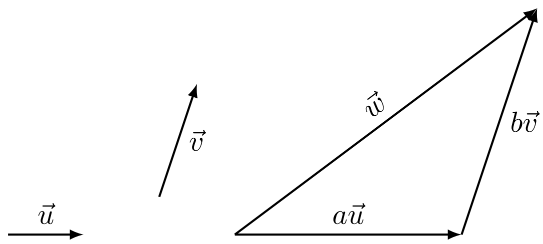
Soit une droite $\mathscr{D}$ non verticale admettant pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}(-b\,; a)$ (propriété 2). On en déduit que son coefficient directeur est $-\dfrac{a}{b}$.

On peut le vérifier directement. En effet : $ax + by + c = 0$ équivaut à : $by = -ax - c$ et à : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.

4 Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires

Propriété 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires (et donc non nuls.)
Pour tout vecteur du plan $\vec{w}$, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.



Remarque :

Soit $(O; I; J)$ un repère du plan. Posons $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

On peut alors écrire pour tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(x; y)$: $\vec{w} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Autrement dit, on définit de manière équivalente le repère choisi par $(O; I; J)$ ou par $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.