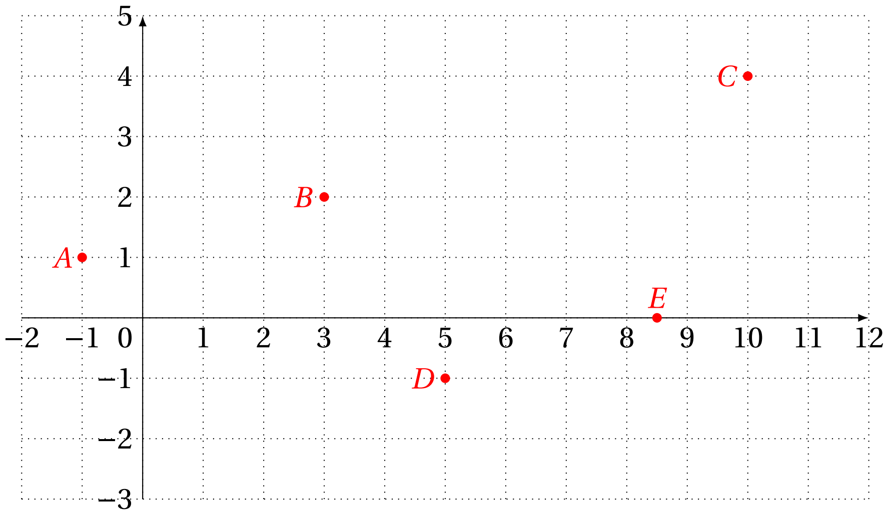
Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. $xy' - x'y = -3 \times 0 - 2 \times (-7{,}5) = 15 \neq 0$. D'après la propriété du cours, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
   On en déduit, en passant aux coordonnées :
   $$\begin{cases} -3a + 2b & = 5 \\ -7{,}5a & = 5 \end{cases}$$
   On a donc (ligne 2) : $a = -\dfrac{5}{7{,}5} = -\dfrac{2}{3}$
   Et donc (ligne 1) : $-3 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 2b = 5$
   $2 + 2b = 5$
   $b = \dfrac{3}{2}$.
   Ainsi, $\boxed{\vec{w} = -\dfrac{2}{3}\vec{u} + \dfrac{3}{2}\vec{v}}$.
3. $M(x\,;y) \in d$ si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{w}$.
   $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$
   D'après la propriété du cours, ceci est équivalent à : $5(x-2) - 5(y-3) = 0$
   Ainsi : $5x - 10 - 5y + 15 = 0$ qui équivaut à : $5x - 5y + 5 = 0$ et à : $x - y + 1 = 0$
   La droite d admet donc comme équation : $x - y + 1 = 0$.

Exercice 2 :

1.



2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11\\3\end{pmatrix}$
   $xy' - x'y = 4 \times 3 - 11 \times 1 = 1 \neq 0$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}5{,}5\\-2\end{pmatrix}$

   $6\times(-2)-5{,}5\times(-2)\neq 0$ donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc (AD) et (BE) ne sont pas parallèles.

4. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}3{,}5\\1\end{pmatrix}$

   $7\times 1-3{,}5\times 2=0$ donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
   Donc BC et DE sont parallèles.

5. Soit $M(x\,;y)$ un point de (BD).
   $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, donc : $-3(x-3)-2(y-2)=0$
   $-3x+9-2y+4=0$
   $(BD): 3x+2y-13=0$

6. Soit $M(x\,;y)$ un point de (CE).
   $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-10\\y-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1{,}5\\-4\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, donc : $-4(x-10)+1{,}5(y-4)=0$
   $-4x+40+1{,}5y-6=0$
   $-4x+1{,}5y+34=0$
   $(CE): 8x-3y-68=0$

7. Les coordonnées de F vérifient le système constitué des équations de (BD) et (CE).

   $$\begin{cases}3x+2y-13&=0\\8x-3y-68&=0\end{cases}$$

   $L1\to L1\times 3$
   $L2\to L1\times 2$

   $$\begin{cases}9x+6y-39&=0\\16x-6y-136&=0\end{cases}$$

   $L2\to L1+L2$

   $$\begin{cases}9x+6y-39&=0\\25x-175&=0\end{cases}$$

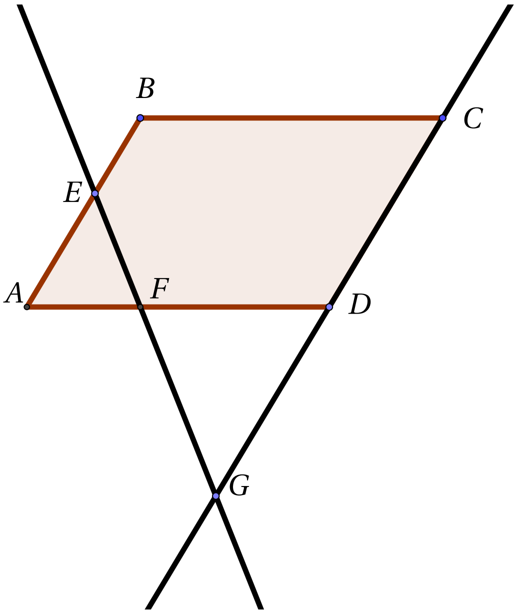
   $$\begin{cases}9x+6y-39&=0\\x&=7\end{cases}$$

   $$\begin{cases}63+6y-39&=0\\x&=7\end{cases}$$

   $$\begin{cases}6y+24&=0\\x&=7\end{cases}$$

   $$\begin{cases}y&=-4\\x&=7\end{cases}$$ $F(7\,;-4)$

Exercice 3 :

1. 

2. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

   $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

   $\boxed{\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}}$

3. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$

   $\overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$

   $\overrightarrow{EG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA}$

   $\overrightarrow{EG} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB}$

   $\boxed{\overrightarrow{EG} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

4. On a : $\frac{8}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{8}{5}$ et $\frac{8}{3} \times \frac{3}{8} = 1$.

   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{EG} = \frac{8}{3}\overrightarrow{EF}}$

5. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
   Par conséquent, les points E, F et G sont alignés.