Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

1. On applique la condition de colinéarité : $4a - a(a-1) = 0$ soit $-a^2 + 5a = 0$ soit $a(-a+5) = 0$
   Ainsi, $a = 0$ ou $a = 5$.
   Les valeurs pour lesquelles des vecteurs sont colinéaires sont $\boxed{0 \text{ et } 5}$.

2. • Si $a = 0$, on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

   On voit facilement que $\boxed{\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}}$.

   • Si $a = 5$, on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$.

   On voit alors que $\boxed{\vec{v} = 2\vec{u}}$.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4{,}8\\1{,}6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}26{,}4\\8{,}8\end{pmatrix}$.

   $4{,}8 \times 8{,}8 - 1{,}6 \times 26{,}4 = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   Par conséquent, $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}}$.

2. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4{,}8\\1{,}6\end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}58{,}8\\22{,}4\end{pmatrix}$.

   $4{,}8 \times 22{,}4 - 1{,}6 \times 58{,}8 = 13{,}44$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   Les droites (AB) et (AD) $\boxed{\text{ne sont pas parallèles}}$.

3. Posons $M(x;y)$. On a alors : $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+3\\y+1\end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$.

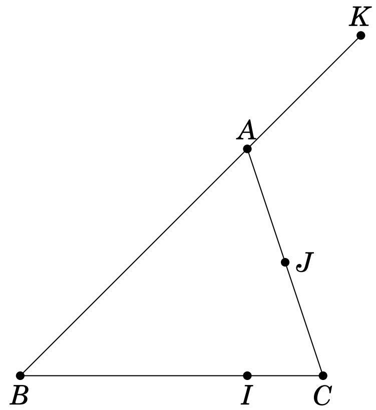
   On écrit la condition de colinéarité : $(x+3)\times 5 - (y+1)\times 12 = 0$.
   On développe : $5x + 15 - 12y - 12 = 0$ soit : $5x - 12y + 3 = 0$.
   Une équation cartésienne de (d) est donc : $\boxed{5x - 12y + 3 = 0}$.

4. On remplace dans l'équation précédente x et y par les coordonnées de G :
   $5 \times 21 - 12 \times 9 + 3 = 0$.
   Les coordonnées de G vérifient l'équation de (d), donc $\boxed{G \text{ appartient bien à la droite } (d)}$.

5. Un vecteur directeur directeur de la droite (d) est, d'après le cours : $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. C'est aussi un vecteur directeur de (d') puisqu'elle est parallèle à (d).
   Ainsi, (d') admet pour équation cartésienne : $5x + 3y + c = 0$. Il reste à trouver la valeur de c.
   Comme $H \in (d')$, les coordonnées de H vérifient l'équation de (d').
   On a donc : $5 \times 1 + 3 \times (-3) + c = 0$, soit $c = 4$.
   Une équation cartésienne de la droite (d') est donc : $\boxed{5x + 3y + 4 = 0}$.

Exercice 3 :

1. Le dessin :



2. $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI}$
   $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$
   $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$
   $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
   $\boxed{\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$
3. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}$
   $\overrightarrow{JK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $\overrightarrow{JK} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
   $\boxed{\overrightarrow{JK} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$
4. On voit que $\overrightarrow{JK} = -2\overrightarrow{JI}$. Par conséquent, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont colinéaires.
   On en déduit que les points I, J, K sont alignés.

Exercice 4 :

1. $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $I\left(\dfrac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$,
2. Posons comme d'habitude $M(x;y)$.
   On a : $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x - \dfrac{1}{3} \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On écrit la condition de colinéarité : $\left(x - \dfrac{1}{3}\right) \times 1 - y \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$.
   On obtient : $x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{3} = 0$, soit, en multipliant par 3 : $3x + y - 1 = 0$.
   Une équation cartésienne de (ID) est donc : $\boxed{3x + y - 1 = 0}$.
3. Même méthode :
   On a : $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ y - \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   On écrit la condition de colinéarité : $x \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) - \left(y - \dfrac{1}{3}\right) \times 1 = 0$.
   On obtient : $-\dfrac{1}{3}x - y + \dfrac{1}{3} = 0$, soit, en multipliant par -3 : $x + 3y - 1 = 0$.
   Une équation cartésienne de (ID) est donc : $\boxed{x + 3y - 1 = 0}$.

4. Le point K appartient à la fois à (ID) et (JB), donc ses coordonnées sont solution du système formé par les équations des deux droites, c'est à dire :
$\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x+3y-1=0 \end{cases}$
Isolons y dans la première ligne : $y=-3x+1$.
On remplace dans la deuxième ligne : $x+3(-3x+1)-1=0$
soit : $-8x+2=0$
$x=\dfrac{1}{4}$
On remplace : $y=-3\times\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{-3}{4}+1=\dfrac{1}{4}$.
Les coordonnées de K sont donc : $\boxed{\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)}$.

5. On a : $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
On voit facilement que $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AK}$. Les vecteurs sont donc colinéaires.
On en déduit que $\boxed{\text{les points } A, K \text{ et } C \text{ sont alignés}}$ (quelle surprise...)