Dérivation

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}$ désigne sa courbe représentative.

1 Taux de variation d'une fonction

Définition 1
Soient a et b deux nombres de I. On appelle **taux de variation** de f entre a et b, le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Par exemple, soit f la fonction carré $x \longmapsto x^2$.

Le taux de variation de f entre $a = 2$ et $b = 3$ est : $\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2} = \dfrac{9-4}{1} = 5$.

Interprétation graphique : Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$, d'abscisses respectives a et b.

Le taux de variation de la fonction f entre les deux réels a et b est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

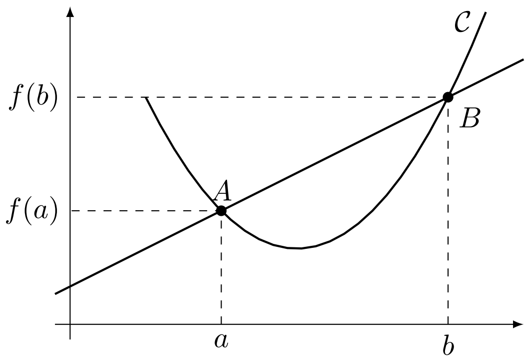


Figure 1

2 Nombre dérivé

Soit $a \in I$, et soit h un nombre réel tel que $a + h \in I$.

Notons $t(h)$ le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$: $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Définition 2
Si, lorsque le nombre h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux de variation $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus proches d'un nombre l, alors on dira que la fonction f est dérivable en a, et que le nombre l est **le nombre dérivé** de f en a. On note (s'il existe), ce nombre dérivé $f'(a)$.
Formellement, on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ce qui signifie : « $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »

Exemple :

Soit f la fonction carré $x \longmapsto x^2$. On calcule :

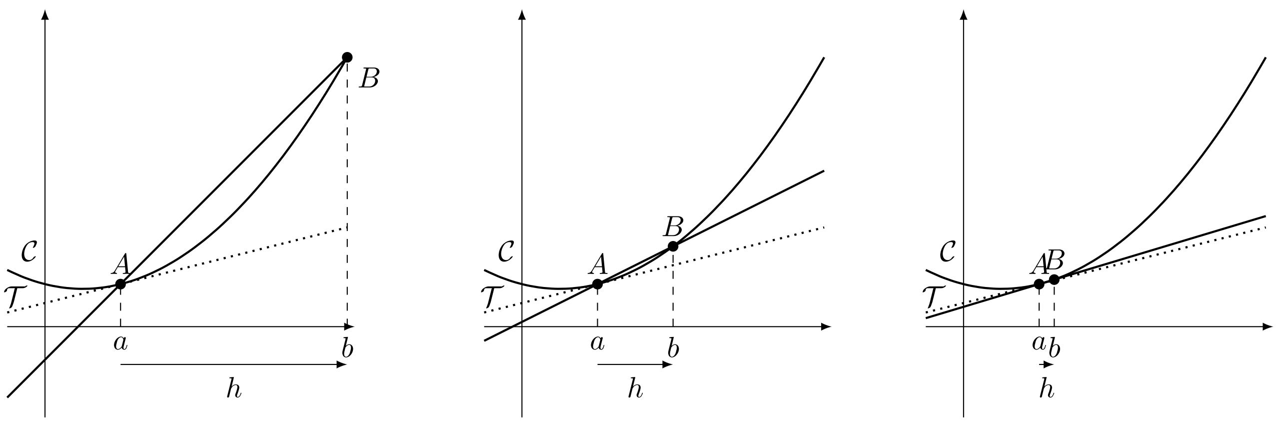
$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux de variation $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus proches de 2. La fonction f est donc dérivable en $a = 1$, et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

3 Interprétation graphique : tangente à une courbe

Partons de la figure 1 et posons : $h = b - a$. On a vu que le taux de variation $t(h)$ est le coefficient directeur de la droite (AB). Quand h tend vers 0, le point B se rapproche infiniment du point A. Ainsi, la droite (AB) tend vers une position limite qu'on appelle la **tangente** en A à la courbe $\mathcal{C}$.

Illustration : Quand h tend vers 0, la droite (AB) se rapproche de la droite $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}$ en A.



Définition 3
Supposons que la fonction f soit dérivable en $a \in I$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1
L'équation réduite de cette tangente est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

4 Fonction dérivée

Définition 4
Si la fonction f est dérivable pour tout $a \in I$, alors on dit que f est **dérivable** sur I, et la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f, notée f'.

Exemple :

Reprenons la fonction carré : $f(x) = x^2$. Prenons un nombre réel a quelconque, et cherchons à déterminer, si c'est possible, le nombre dérivé de f en a :

$t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h.$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} 2a + h = 2a$.

Ainsi f est dérivable en tout nombre réel a, et $f'(a) = 2a$.

5 Dérivées usuelles

Si on a $f(x) = \ldots$	alors f est dérivable sur $\ldots$	et $f'(x) = \ldots$
k (nombre réel)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, u' et v' leur dérivée.

Soit k un nombre réel.

Si on a $f(x) = \ldots$	alors $f'(x) = \ldots$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$k \times u(x)$	$k \times u'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$ (avec $v(x) \neq 0$)	$-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (avec $v(x) \neq 0$)	$\dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

7 Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I_f =]\alpha\,;\beta[$.

Soit g la fonction telle que : $g(x) = f(ax+b)$.

On voit que $g(x)$ est défini si $f(ax+b)$ est défini. Ainsi, $ax+b$ doit appartenir à I_f. On peut donc dire : l'ensemble de définition D_g de g est l'ensemble des réels x vérifiant : $ax+b \in I_f$.

Propriété 2
Soit x_0 un réel fixé dans D_g ; on a : $g'(x_0) = af'(ax_0+b)$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et g : $g(x) = f(3x+2) = (3x+2)^2$.

Calculons $g'(1)$: $g'(1) = 3 \times f'(3 \times 1 + 2) = 3 \times f'(5) = 3 \times 2 \times 5 = 30$.

On peut vérifier en écrivant directement $g(x)$ développée : $g(x) = (3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$.

Alors $g'(x) = 18x + 12$, d'où : $g'(1) = 18 + 12 = 30$. Ça marche.

8 Les démonstrations du cours

8.1 Équation de la tangente

Par définition, la tangente $\mathcal{T}_a$ à la courbe C_f représentant f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Soit $y = mx + p$, l'équation de $\mathcal{T}_a$. On sait que $m = f'(a)$ par définition. On a donc : $\mathcal{T}_a : y = f'(a)x + p$.

D'autre part, A appartient à $\mathcal{T}_a$, donc ses coordonnées $(a\,; f(a))$ vérifient l'équation de celle-ci.

On a donc en remplaçant : $f(a) = f'(a) \times a + p$; on en déduit : $p = f(a) - f'(a) \times a$.

Par conséquent : $\mathcal{T}_a : y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a) \times (x - a) + f(a)$, en mettant $f'(a)$ en facteur.

8.2 La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

Soit f la fonction racine carrée. On cherche si le taux de variation en 0 a une limite.

Le taux de variation de f entre 0 et x est : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Or, ce quotient devient infiniment grand quand x devient infiniment petit.

Pour le démontrer, raisonnons par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ serait majoré, il resterait plus petit qu'un certain nombre A fixé. On aurait alors, pour tout x : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq A$.

Ceci équivaut à : $1 \leq A\sqrt{x}$, puis à $\dfrac{1}{A} \leq x$ (l'inégalité ne change pas de sens puisqu'on multiplie par un nombre positif).

Ceci équivaut à : $\left(\dfrac{1}{A}\right)^2 \leq \sqrt{x}^2$ (les carrés sont dans le même ordre que les nombres de départ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Ceci s'écrit aussi : $\dfrac{1}{A^2} \leq x$. On voit que c'est impossible, puisque x devient aussi petit qu'on veut.

Vérifions avec quelques valeurs numériques :

x	0,1	0,01	0,001	0,000 001	10^{-10}	10^{-20}
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	3,16	10	31,6	1000	10^5	10^{10}

Comme le taux de variation ne tend vers une limite finie, f n'est pas dérivable en 0.

8.3 Dérivée de la fonction carré

Posons $f(x) = x^2$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2a + h = 2a$$

8.4 Dérivée de la fonction inverse

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$, avec $x \neq 0$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{a}{a(a+h)} - \dfrac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h}$$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-h}{h \times a(a+h)} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$

8.5 Dérivée d'un produit

Soit f, u, v trois fonctions définie sur un même intervalle ouvert I telles que $f(x) = u(x)v(x)$ pour $x \in I$.

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{[u(a+h) - u(a)] \times v(a+h)}{h} + \dfrac{u(a)\,[v(a+h) - v(a)]}{h}$

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + \lim_{h \to 0} u(a) \times \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Or, $\lim_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$

Donc : $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

8.6 Dérivée d'une fonction composée

On a : $g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$, par définition du nombre dérivé.

Par ailleurs : $g(x_0) = f(ax_0 + b)$ et $g(x_0 + h) = f(a(x_0 + h) + b) = f(ax_0 + b + ah)$, par définition de g.

Pour alléger le calcul, posons $y_0 = ax_0 + b$. On obtient : $g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(y_0 + ah) - f(y_0)}{h}$

Multiplions par a le numérateur et le dénominateur :

$g'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{a\,[f(y_0 + ah) - f(y_0)]}{ah}$ qu'on peut écrire : $g'(x_0) = a \lim_{h \to 0} \dfrac{f(y_0 + ah) - f(y_0)}{ah}$

Posons aussi : $ah = k$; on voit que « h tend vers 0 » est équivalent à « k tend vers 0 ».

Par conséquent : $g'(x_0) = a \lim_{k \to 0} \dfrac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}$.

On reconnaît la formule donnant le nombre dérivé de f en y_0.

Donc : $g'(x_0) = af'(y_0)$, soit : $g'(x_0) = af'(ax_0 + b)$.

9 Dérivée et sens de variation d'une fonction

L'idée est qu'autour du point de contact, la courbe et la tangente ont le même comportement. Si la fonction est croissante, sa courbe « monte », la tangente aussi, donc son coefficient directeur, le nombre dérivé, est positif. Si la fonction est décroissante, alors par le même mécanisme, le coefficient directeur est négatif.

Théorème 1
Soit f une fonction dérivable sur I.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement croissante sur I.
- Si f est croissante sur I alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f est décroissante sur I alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 1 : Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x - 8$.

On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

Exemple 2 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+3}$.

On voit que -3 est une valeur interdite. Ainsi, f est définie et dérivable sur $]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$.

On calcule : $f'(x) = \dfrac{x^2+6x-7}{(x+3)^2} = \dfrac{(x-1)(x+7)}{(x+3)^2}$.

Le signe de f' est le même que celui du numérateur, car le dénominateur est un carré, donc toujours positif.

Le numérateur est un trinôme du second degré, donc du signe de a sauf entre les racines. Ici, $a = 1$ et les racines sont -7 et 1.

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		-7		-3		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$		$\nearrow$	-14	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$