Produit scalaire et applications

1 Le produit scalaire dans le plan

1.1 Angle formé par deux vecteurs

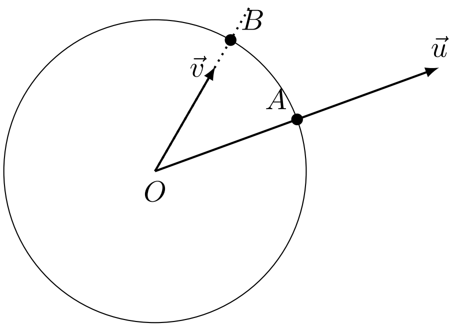
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On rappelle que $\|\vec{u}\|$ désigne la norme de $\vec{u}$, c'est à dire sa longueur.

Soit A le point tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a même direction et même sens que $\vec{u}$, et sa norme est 1.

Soit B le point tel que le vecteur $\overrightarrow{OB}$ a même direction et même sens que $\vec{v}$, et sa norme est 1.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ étant de norme 1, les points A et B sont situés sur le cercle trigonométrique.



On sait donc déterminer une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$. On dit que l'angle $\widehat{AOB}$ est aussi l'angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$, et $\vec{v}$, noté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$.

Si α est une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$, on appelle, pour abréger, cosinus de l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ le cosinus de α.

Quelques exemples :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et même sens, l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est un angle nul (ou fermé).
  Donc $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \cos(0) = 1$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction et des sens opposés, l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est un angle plat.
  Donc $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \cos(\pi) = -1$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est un angle droit.
  Donc $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
- Si l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est aigu, alors il admet une mesure entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, donc son cosinus est positif : $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) \geq 0$.
- Si l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est obtus, alors il admet une mesure entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π, donc son cosinus est négatif : $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) \leq 0$.

1.2 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

Définition 1
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est le nombre défini ainsi :
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

De façon équivalente, si A, B, C sont trois points distincts du plan, alors :

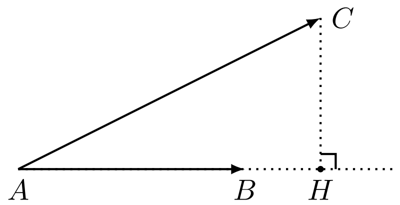
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

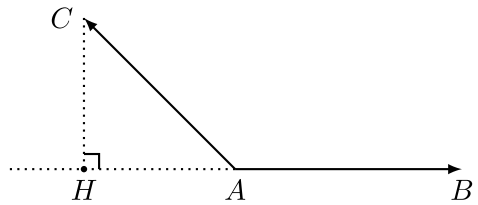
Important : Bien noter que le produit scalaire de deux vecteurs est **un nombre**.

1.3 Expression à l'aide du projeté orthogonal

Propriété 1
Soient A, B, C, trois points distincts. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.



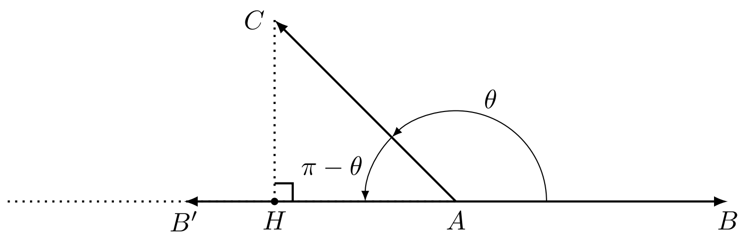


Démonstration :
Si $\widehat{BAC}$ est aigu, alors dans le triangle rectangle ACH : $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$

Donc : $AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AH$

et donc : $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AH$

Si $\widehat{BAC}$ est obtus, considérons le point B', symétrique de B par rapport à A.



Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. L'angle $\widehat{CAB'}$ mesure alors $\pi - \theta$.

On sait que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ (d'après le cours sur la trigonométrie).
On peut donc écrire :

$AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\theta) = -AB \times AC \times \cos(\pi - \theta) = -AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB'})$

Le triangle ACH est rectangle et on a encore : $\cos(\widehat{CAB'}) = \cos(\widehat{CAH}) = \dfrac{AH}{AC}$

Donc : $AC \times \cos(\widehat{CAB'}) = AH$

Donc $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = -AB \times AC \times \cos(\widehat{CAB'}) = -AB \times AH$ ■

1.4 Expression à l'aide des distances

Propriété 2
Soient A, B, C, trois points du plan. Alors :

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$$

De façon équivalente : $2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$

Démonstration :
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

D'après le théorème de Pythagore :

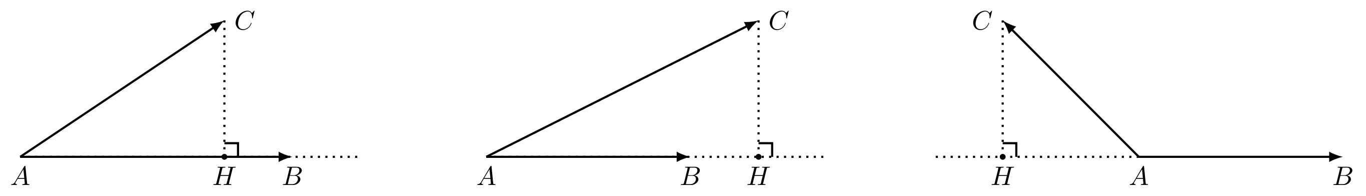
$AC^2 = AH^2 + HC^2$

$BC^2 = HB^2 + HC^2$

Donc $AC^2 - BC^2 = AH^2 + HC^2 - HB^2 - HC^2 = AH^2 - HB^2$

Ainsi, on a toujours : $AC^2 - BC^2 = AH^2 - HB^2$ (*)

À partir d'ici, on distingue trois cas :



- L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et le point H appartient au segment $[AB]$.
  On a alors : $AB^2 = (AH + HB)^2 = AH^2 + 2AH \times HB + HB^2$
  Donc, en utilisant l'égalité (*) :
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = AH^2 - HB^2 + AH^2 + 2AH \times HB + HB^2 = 2AH^2 + 2AH \times HB$
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = 2AH \times (AH + HB) = 2AH \times AB = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'après la propriété 1.

- L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et le point B appartient au segment $[AH]$.
  On a alors : $AB^2 = (AH - HB)^2 = AH^2 - 2AH \times HB + HB^2$
  Donc, en utilisant l'égalité (*) :
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = AH^2 - HB^2 + AH^2 - 2AH \times HB + HB^2 = 2AH^2 - 2AH \times HB$
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = 2AH \times (AH - HB) = 2AH \times AB = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'après la propriété 1.

- L'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, alors le point A appartient forcément au segment $[HB]$.
  On a alors : $AB^2 = (HB - AH)^2 = HB^2 - 2HB \times AH + AH^2$
  Donc, en utilisant l'égalité (*) :
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = AH^2 - HB^2 + HB^2 - 2HB \times AH + AH^2 = 2AH^2 - 2HB \times AH$
  $AC^2 - BC^2 + AB^2 = 2AH \times (AH - HB) = -2AH \times (HB - AH) = -2AH \times AB = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ d'après la propriété 1.

Si on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, d'après la relation de Chasles. Il n'y a plus qu'à remplacer dans la première égalité. ■

1.5 Expression à l'aide des coordonnées

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Propriété 3

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Attention : Cette propriété n'est vraie **que si** le repère est orthonormé.

Démonstration :
Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur est donnée par la formule : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est une conséquence du théorème de Pythagore.

Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, les coordonnées de $\vec{v} - \vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}x' - x\\y' - y\end{pmatrix}$.

Alors : $\|\vec{v} - \vec{u}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

On prend le carré de la norme pour se débarrasser de la racine carrée :

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'^2 - 2x'x + x^2 + y'^2 - 2y'y + y^2$$

$$\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2-2(xx'+yy')$$

D'autre part : $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2+y'^2$.

On a donc :

$$\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(xx'+yy')$$

et donc, d'après la propriété 2 :

$$2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2 = 2(xx'+yy')$$

soit en divisant par 2 :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (xx'+yy')$$

Cela montre que la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$ est vraie **dans n'importe quel repère orthonormé**. ■

1.6 Propriétés usuelles

Propriété 4
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, k un réel.

1. Posons : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$. On a alors : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$ (avec la convention que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.)
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et pour tout $k\in\mathbb{R}$: $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (Bilinéarité.)

Démonstration :

1. D'après la définition 1, on a : $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}}) = \|\vec{u}\|^2\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.
2. Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ d'après la définition 1.
   Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, on a :
   $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}})=0 \iff \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}})=0 \iff (\widehat{\vec{u}\,;\vec{u}})$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
3. C'est une conséquence de la définition, car : $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|$ et $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \cos(\widehat{\vec{v}\,;\vec{u}})$
4. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$. D'après la propriété 3 :
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'') = xx'+xx''+yy'+yy'' = xx'+yy'+xx''+yy'' = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = xkx'+yky' = k(xx'+yy') = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

■

Remarques :

- $\vec{u}\cdot(-\vec{v}) = (-\vec{u})\cdot\vec{v} = -\vec{u}\cdot\vec{v}$
- La bilinéarité du produit scalaire entraîne les identités remarquables habituelles :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 \qquad (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$$

2 Deux applications du produit scalaire

2.1 Angles et longueurs dans un triangle

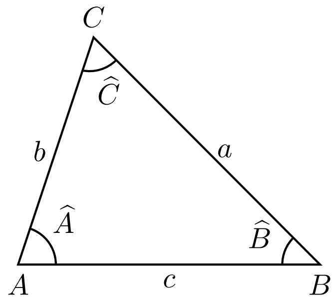
Propriété 5 (Formule d'Al-Kashi)
Soit ABC un triangle quelconque.

On pose pour simplifier : $a=BC$; $b=AC$; $c=AB$; $\widehat{A}=\widehat{BAC}$; $\widehat{B}=\widehat{ABC}$; $\widehat{C}=\widehat{BCA}$.

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$



Démonstration :
Démontrons la première formule, c'est la même démarche pour les autres.

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$ (d'après la propriété 4.1)

donc on a successivement :

$BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ (relation de Chasles)

$BC^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$ (identité remarquable)

$BC^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$ (propriété 4.1)

$BC^2 = BA^2 + 2(-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$ (définition du vecteur opposé)

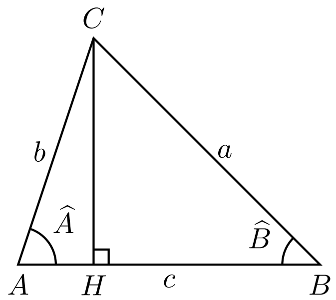
$BC^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$ (bilinéarité - 4.4)

$BC^2 = BA^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + AC^2$ (définition du produit scalaire) ■

La propriété précédente ne s'applique que lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle entre les deux. Pour résoudre certains problèmes, on a besoin de la propriété suivante, qui ne se démontre pas par le produit scalaire :

Propriété 6 (Formule des sinus)
Avec les notations précédentes :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$



Démonstration :
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

- Supposons $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ aigus.

  Dans le triangle rectangle ACH, on a : $\sin \widehat{A} = \dfrac{CH}{CA}$ donc $CH = CA \times \sin \widehat{A}$.

  Dans le triangle rectangle BCH, on a : $\sin \widehat{B} = \dfrac{CH}{CB}$ donc $CH = CB \times \sin \widehat{B}$.

  Ainsi : $CA \times \sin \widehat{A} = CB \times \sin \widehat{B}$ et donc $\dfrac{CA}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{CB}{\sin \widehat{A}}$, ce qui se note aussi : $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$

- Supposons $\widehat{A}$ obtus et $\widehat{B}$ aigu.

  Si θ est une mesure de $\widehat{BAC}$, alors $\pi - \theta$ est une mesure de $\widehat{CAH}$.

  Or, pour tout x, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. Donc $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{CAH}$.

  Dans le triangle rectangle CAH : $\sin \widehat{CAH} = \dfrac{CH}{CA}$. Donc $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{CH}{CA}$.

On trouve à nouveau : $CH = CA \times \sin \widehat{A}$.

Dans le triangle rectangle BCH, on a toujours : $\sin \widehat{B} = \dfrac{CH}{CB}$ donc $CH = CB \times \sin \widehat{B}$.

Donc, comme précédemment : $CA \times \sin \widehat{A} = CB \times \sin \widehat{B}$ et la conclusion est la même.

- On traite de la même façon le cas où $\widehat{A}$ est aigu et $\widehat{B}$ obtus.

  On a ainsi dans tous les cas : $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$.

- Il reste l'égalité avec le dernier quotient, $\dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$. Pour démontrer par exemple : $\dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$, on considère le projeté orthogonal de B sur la droite (CA) et on applique la même méthode.

■

Ces formules ne sont pas à retenir mais à savoir retrouver et démontrer à chaque fois.

2.2 Ensemble de points

Soient A et B deux points du plan.

Propriété 7
L'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration :
Soit I le milieu de $[AB]$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$ d'après la relation de Chasles.

Comme I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Par conséquent : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

D'après l'identité remarquable : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Et d'après la propriété 4.1 : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$

Ainsi : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0 \iff MI^2 = IA^2 \iff MI = IA$

et $MI = IA$ est équivalent à :

M appartient au cercle de centre I et de rayon IA, c'est à dire au cercle de diamètre $[AB]$. ■

Remarque : Par la même méthode, on peut étudier l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, où k est un réel quelconque.

Suivant la valeur de k, on trouve un cercle, un point, ou aucune solution.