Devoir surveillé nº8 - Correction

Exercice 1 :

1) Compléter les égalités (sans justification) :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x^2}+7=7 \;;\; \lim_{x\to+\infty} -3x^4+100=-\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} 3x^2+1=13 \;;\; \lim_{x\to-\infty} x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{5x}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{2}{x}+2^{10}=+\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{2}{x-3}=-2 \;;\; \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{-5}{(x-1)^2}=-\infty \;;\; \lim_{\substack{x\to-5\\x>-5}} \frac{1}{x+5}+3x+1=+\infty$$

2) Déterminer les limites suivantes en justifiant soigneusement :

a) On a ici une forme indéterminée. On lève l'indétermination de manière classique, en mettant en facteur les termes prépondérants.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{-3x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-3-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{-3-\frac{3}{x}}$$. Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x}=0$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{-3x^2-3x}=\frac{3}{-3}=-1}$.

b) Même méthode.

$\lim_{x\to-\infty} 5x^2+2x+1=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}=0$, d'où $\lim_{x\to-\infty} \left(5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=5$.

Donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} 5x^2+2x+1=\lim_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty}$.

c) $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x^2=0^-$ car la fonction $x\to1-x^2$ est décroissante sur [0 ; +∞[.

Donc $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{1-x^2}=-\infty$. Et donc, $\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{3}{1-x^2}=-\infty}$

Exercice 2 : (5 points)

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors *f* est croissante sur $\mathbb{R}$.	VRAI	FAUX
Si *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)+g(x)\right)=0$	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)\times g(x)\right)=0$	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=0$	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=1$	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=0$.	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, alors la représentation graphique de *f* a une asymptote horizontale en +∞.	VRAI	FAUX
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors la représentation graphique de *f* a une asymptote oblique en +∞.	VRAI	FAUX
Si l'ensemble de définition de la fonction *f* est : $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, alors la droite d'équation *x* = 1 est asymptote verticale à la représentation graphique de *f*.	VRAI	FAUX

Exercice 3 : (8 points)

Soit la fonction *f* définie sur]–∞ ; 2[∪]2 ; +∞[par $f(x)=\frac{x^2+4x-8}{2x-4}$. On appelle C_f la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé.

1. On réduit au même dénominateur :
$$\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{x-2}=\frac{x(x-2)}{2(x-2)}+\frac{3\times2(x-2)}{2(x-2)}+\frac{2\times2}{2(x-2)}=\frac{x^2-2x+6x-12+4}{2x-4}=\frac{x^2+4x-8}{2x-4}=f(x)$$. Ça marche.

2. Commençons par les limites en ±∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-2}=0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{x-2}=+\infty .$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x=-\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x-2}=0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{x-2}=-\infty .$$

Calculons à présent les limites en 2 à gauche et à droite :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{2}x = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{2}x = 1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x-2=0^{-}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2}{x-2}=-\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2}{x-2}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x-2=0^{+}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2}{x-2}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2}{x-2}=+\infty$

Ces deux derniers résultats montrent que la courbe C_f représentant f admet une asymptote verticale d'équation $\underline{x = 2}$.

3. On sait que $f(x)=\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2}{x-2}$. On peut alors facilement conjecturer que C_f admet pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ la droite Δ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+3$. Démontrons-le pour $+\infty$:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-2}=0$. Donc Δ est bien une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

   On le démontre de la même façon pour $-\infty$.

   La position de C_f par rapport à Δ est donnée par le signe de $f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)=\dfrac{2}{x-2}$.

   Si $x<2$, alors $\dfrac{2}{x-2}<0$ donc C_f est au-dessous de Δ.

   Si $x>2$, alors $\dfrac{2}{x-2}>0$ donc C_f est au-dessus de Δ.

4. On peut utiliser l'une ou l'autre formule donnant $f(x)$. La deuxième apparaît toutefois plus commode d'emploi. On obtient ainsi d'après les formules du cours :

   $$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}-\frac{2\times 2}{2(x-2)^2}=\frac{1}{2}\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}.$$

5. Étudions le signe de f'.

   Comme le dénominateur est un carré, il est toujours positif. Donc, le signe de f' est le même que celui du numérateur.

   $(x-2)^2-4=(x-2)^2-2^2=(x-2+2)(x-2-2)=x(x-4)$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$