MATHÉMATIQUES – Devoir surveillé n°1 - corrigé

Exercice 1 :

1) f et g ont le même ensemble de définition : $]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}\ ;+\infty[$.

   Par contre, $f(x)=3-\frac{1}{2x+1}=\frac{6x+2}{2x+1}\neq g(x)$. Donc $f\neq g$.

2) $D_f =]-\infty\ ;\ -1[\cup]0\ ;+\infty[$ car $x^2+x<0$ lorsque $-1<x<0$.
   $D_g=\mathbb{R}^+$ car $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}$ doivent être définis.
   f et g n'ont pas le même ensemble de définition, donc $f\neq g$.
   Il est facile de vérifier que, par exemple $f(-2)$ existe, mais pas $g(-2)$.

3) Ici, $D_f = D_g = \mathbb{R}$.
   Mais attention : $\sqrt{x^2}$ n'est égal à x que si $x\geqslant 0$. Donc, pour $x<0$, $f(x)\neq g(x)$.
   Ainsi $f\neq g$.

Exercice 2 :

1) $x\in D_{f\circ g}$ si $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases}$ donc $\begin{cases} x\neq -3 \\ g(x)\in\mathbb{R} \end{cases}$ donc $D_{f\circ g} =]-\infty\ ;\ -3[\cup]-3\ ;+\infty[$.

   $x\in D_{g\circ f}$ si $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases}$ donc $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2\neq -3 \end{cases}$; or $x^2\neq -3$ pour tout x.

   Donc $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

   $f\circ g\,(x)=\ f\left(\frac{1}{x+3}\right)=\left(\frac{1}{x+3}\right)^2=\frac{1}{(x+3)^2}$ et $g\circ f\,(x)=g(x^2)=\frac{1}{x^2+3}$

2) *a)* $x\in D_{k\circ h}$ si $\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ h(x)\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$ donc $-2x+3\geqslant 0$ soit $x\leqslant\frac{3}{2}$.

   Donc : $D_{k\circ h}=]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}]$. Puis, on calcule : $k\circ h(x) = \sqrt{-2x+3}$

   b) h est décroissante ; k est croissante. D'après le cours, la composée $k\circ h$ est décroissante.

Exercice 3 :

On sait que $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $2\vec{i}$.
On sait que $\mathcal{C}_h$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $\vec{j}$.
On sait que $\mathcal{C}_k$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une symétrie d'axe l'axe des abscisses.

Exercice 4 :

x	-3	-1	1	5
$g(x)$	8 ↘	3 ↘	-1 ↗	1

x	-3	-1	1	5
$h(x)$	-15 ↗	0 ↗	12 ↘	6

x	-1		1		3		7
$k(x)$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2

Exercice 5 :

1) On peut par exemple décomposer f sous la forme : $x \to \sqrt{x}+2 \to \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$.

On pose donc $g(x) = \sqrt{x}+2$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$; alors $f = h \circ g$.

g est croissante car on peut écrire $g = r + 2$, où r est la fonction « racine carrée » ; on sait alors (cours) que g a les mêmes variations que r.
D'autre part, $g(x)$ est toujours positif, or h est décroissante sur $\mathbb{R}^{+}$.
La composée de deux fonctions de sens de variations contraires est décroissante. Donc f est décroissante.

2) On résout : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$; on applique la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}^{+}$. Comme les deux membres sont positifs, alors on inverse le sens de l'inégalité :
$\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ équivaut à $\sqrt{x}+2 \geqslant 2$ qui équivaut à $\sqrt{x} \geqslant 0$. Cette dernière inégalité est bien sûr vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Donc f est bien majorée par $\dfrac{1}{2}$.

   Il y a une autre manière de le démontrer : comme f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors pour tout x, $f(x) \leqslant f(0)$. Or $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

3) $\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $\sqrt{x}+2 > 0$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} > 0$ (l'inverse d'un nombre positif est positif.)

   Ainsi, f est minorée par 0. Elle est donc bornée par 0 et $\dfrac{1}{2}$.

4) On examine si $\dfrac{1}{2}$ est une valeur prise par f. On voit qu'il suffit d'avoir $\sqrt{x}+2=2$ soit $x=0$.

   $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\dfrac{1}{2}$ est bien le maximum de f.