Étude de fonctions

1 Fonctions de référence

1.1 Les fonctions affines

Définition 1

> Les fonctions affines sont les fonctions de la forme : $x \mapsto ax+b$ avec a, $b \in \mathbb{R}$

La représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto ax+b$ est une droite de coefficient directeur a.

Variations :

si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$\searrow$	0	$\searrow$	

1.2 La fonction "carré"

Définition 2

> La fonction "carré", définie sur $\mathbb{R}$, est de la forme : $x \mapsto x^2$.

Sa représentation graphique est une parabole.

Variations :

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ (noté aussi $\mathbb{R}^-$) et croissante sur $[0\,;+\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R}^+$).

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres négatifs, avec $a < b$.
  On a alors : $a+b < 0$. En multipliant par $a+b$, l'inégalité précédente change donc de sens.
  Ainsi : $a < b$ implique $a(a+b) > b(a+b)$, soit $a^2+ab > ab+b^2$ et donc $a^2 > b^2$, après simplification
  Les images a^2 et b^2 sont dans l'ordre inverse des antécédents a et b, donc la fonction est décroissante.
- Supposons cette fois a et b positifs, avec toujours $a < b$.
  On a alors : $a+b > 0$. En multipliant par $a+b$, l'inégalité précédente ne change donc pas de sens.
  Ainsi : $a < b$ implique $a(a+b) < b(a+b)$, soit $a^2+ab < ab+b^2$ et donc $a^2 < b^2$, après simplification
  Les images a^2 et b^2 sont dans le même ordre que les antécédents a et b, donc la fonction est croissante. ∎

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

1.3 La fonction "inverse"

Définition 3

> La fonction "inverse", définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ (qui se note aussi $\mathbb{R}^*$), est de la forme : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Sa représentation graphique est une hyperbole.

Variations :

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ (noté aussi $\mathbb{R}^{-*}$) et décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (noté aussi $\mathbb{R}^{+*}$).

Démonstration :
Soient a et b deux nombres différents de 0 et de même signe, avec $a < b$.
On a alors $ab > 0$ puisque a et b sont de même signe. En divisant par ab, l'inégalité précédente ne change donc pas de sens.
Ainsi : $a < b$ implique $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$ et donc $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, après simplification
Les images $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont dans l'ordre inverse des antécédents a et b, donc la fonction est décroissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;+\infty[$. ■

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	||	$\searrow$

Attention ! La fonction inverse est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ pris séparément mais **pas** sur l'ensemble $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Par exemple, $-5 < 2$ et $-\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$; l'ordre est le même entre les antécédents et les images.

1.4 La fonction "racine carrée"

Définition 4

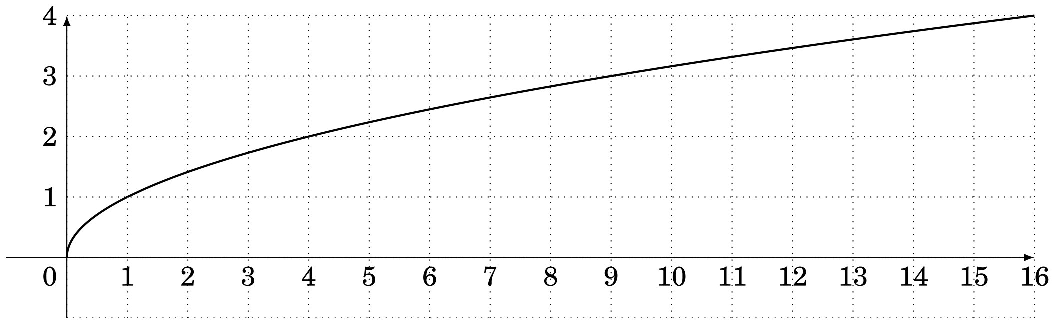
La fonction "racine carrée", définie sur $[0;+\infty[$ (ou $\mathbb{R}^+$), est de la forme : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Variations :

La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.

Démonstration :
Soient a et b deux nombres positifs, avec $a < b$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. Comme ces deux nombres sont positifs (une racine carrée est par définition positive), leurs carrés seraient dans le même ordre (d'après les variations de la fonction carré.)
On aurait donc : $\sqrt{a}^2 \geq \sqrt{b}^2$, soit $a \geq b$, ce qui est contraire aux données.
Ainsi, notre supposition est fausse ; on a donc : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Les images sont dans le même ordre que les antécédents, donc la fonction est croissante. ■

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$



1.5 La fonction "valeur absolue"

Définition 5

On appelle valeur absolue du nombre x, et on note $|x|$, la distance de x à 0.
La fonction "valeur absolue", définie sur $\mathbb{R}$, est de la forme : $x \mapsto |x|$.

Exemples :

$|3| = 3$; $|-3| = 3$; $|27| = 27$; $|-27| = 27$, etc.

On voit que deux nombres opposés ont la même valeur absolue, et d'autre part, si x est positif, $|x| = x$.

En revanche, si x est négatif, alors $|x|$ est l'opposé de x.

Propriété 1

Pour tous nombres a et b, $|a-b| = |b-a| =$ distance entre a et b.

Exemples :

$|3-5| = |5-3| = 2$: c'est la distance entre 3 et 5.

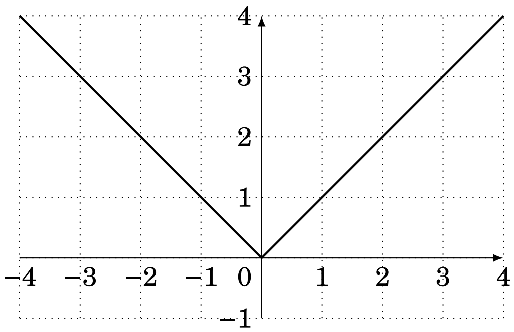
$|-3-5| = |5-(-3)| = 8$: c'est la distance entre -3 et 5.

Variations :

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty;0]$ (alias $\mathbb{R}^-$) et croissante sur $[0;+\infty[$ (alias $\mathbb{R}^+$).

Démonstration : Si x est positif, la fonction valeur absolue est la même que la fonction affine $x \mapsto x$, donc elle est croissante. Si x est négatif, la fonction valeur absolue est la même que la fonction affine $x \mapsto -x$, donc elle est décroissante. ■

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|x\|$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



2 Positions relatives

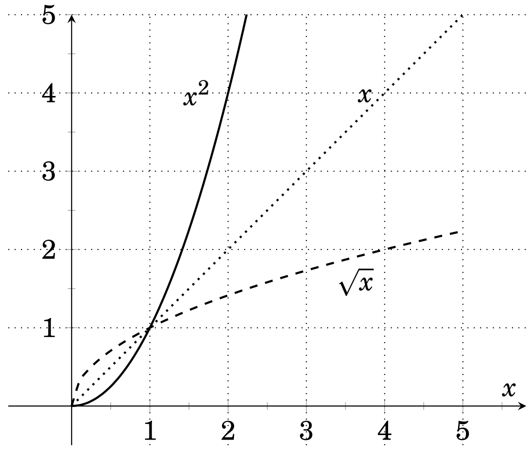
On cherche les positions relatives des courbes des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$. Autrement dit, laquelle est "au-dessus", la quelle est "au-dessous".

On se limite au cas où x est positif, car si $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas et x^2 est positif, donc forcément supérieur à x.

Jetons un petit coup d'œil aux courbes... Apparemment, c'est pour $x = 1$ qu'un changement de position se produit. On va donc distinguer deux cas.

- Premier cas : $x \in [0;1]$.
  Comme x est positif, en multipliant par x, on conserve le sens des inégalités.
  Ainsi, $x \leq 1$ implique $x \times x \leq x \times 1$ soit $x^2 \leq x$.
  Comme la fonction racine carrée est croissante, $x^2 \leq x$ implique $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{x}$, soit $x \leq \sqrt{x}$.
  Ainsi : $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

- Second cas : $x \in [1;+\infty[$.
  Par la même méthode que précédemment, $x \geq 1$ implique $x \times x \geq x \times 1$ soit $x^2 \geq x$.
  Comme la fonction racine carrée est croissante, $x^2 \geq x$ implique $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{x}$, soit $x \geq \sqrt{x}$.
  Ainsi : $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.



Résumons :

Propriété 2

Si $x \in [0;1]$, alors $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
Si $x \in [1;+\infty[$, alors $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.

3 Variations des fonctions composées

Soit u une fonction, k et λ deux réels.

Définition 6 (*notations*)

On note $u+k$ la fonction : $x \mapsto u(x)+k$.
On note λu la fonction : $x \mapsto \lambda \times u(x)$.
On note $\sqrt{u}$ la fonction : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.
On note $\dfrac{1}{u}$ la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$.

Remarque : $\sqrt{u}$ n'est définie que sur un ensemble où u est positive et $\dfrac{1}{u}$ n'est définie que sur un ensemble où u ne prend pas la valeur 0.

Propriété 3

- Quelque soit k, les fonctions u et $u+k$ ont les mêmes variations.
- Si $\lambda > 0$, u et λu ont les mêmes variations.
- Si $\lambda < 0$, u et λu ont des variations opposées (en sens contraire).
- u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur tout intervalle où $\sqrt{u}$ est définie.
- u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations opposées sur tout intervalle où $\dfrac{1}{u}$ est définie et de signe constant.