Second degré

1 Fonction polynôme du second degré

Définition 1
On appelle fonction **polynôme du second degré** (ou trinôme du second degré) toute fonction f telle que : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Exemples :

- $f(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$.
- $f(x) = 4x^2$, on a : $a = 4$, $b = 0$ et $c = 0$.
- $x \mapsto 2x + 1$, $x \mapsto 6x^3 + 4x + 2$ et $x \mapsto (x-1)^2 - x^2$ ne sont pas des trinômes du second degré.

2 Forme factorisée

Une fonction polynôme du second degré peut **parfois** être donnée sous forme factorisée.

Exemple : soit la fonction $x \mapsto f(x) = 5(x-1)(x+4)$. Montrons que f est une fonction polynôme du second degré.

On a : $f(x) = 5(x^2 + 4x - x - 4) = 5(x^2 + 3x - 4) = 5x + 15x - 20$.

Ainsi, on peut écrire : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = 15$ et $c = -20$.

Propriété 1
Soient a, x_1, x_2 trois réels avec $a \neq 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Alors f est une fonction polynôme du second degré ; on dit que f est donnée sous **forme factorisée**.
Les nombres x_1 et x_2 sont appelés les **racines** de la fonction f. Remarquons qu'ils peuvent parfois être égaux.

La démonstration est facile : il suffit de développer $f(x)$ comme dans l'exemple.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2) = a(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$

Ainsi : $f(x) = ax^2 + bx + c$, en posant : $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$

Puisque $a \neq 0$, ce calcul montre aussi que : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Propriété 2
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ce qui impose $a \neq 0$).
Si f admet une forme factorisée, alors :

- la somme des deux racines vaut $-\dfrac{b}{a}$
- le produit des deux racines vaut $\dfrac{c}{a}$

Remarque : Supposons que f admet une forme factorisée.

D'après la propriété précédente, si $b = 0$, alors les deux racines sont opposées. Si $c = 0$, alors l'une des racines (au moins) est égale à 0.

Remarque : Une fonction polynôme du second degré n'admet pas toujours une forme factorisée.

Par exemple, posons $f(x) = x^2 + 1$ et raisonnons par l'absurde.

Si f admettait une forme factorisée, alors les deux racines seraient opposées (d'après la remarque précédente), puisque leur somme serait égale à 0. Mais alors, leur produit serait forcément négatif, et donc ne pourrait pas être égal à 1.

Ainsi, notre supposition est fausse, f n'a pas de forme factorisée.

Remarque : Si f admet une forme factorisée, alors l'équation $f(x) = 0$ a des solutions.

En effet, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ est une équation-produit-nul. Le produit vaut 0, donc un des facteurs (au moins) vaut 0. Comme $a \neq 0$, alors on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l}(x - x_1) = 0 \\ \text{ou} \\ (x - x_2) = 0\end{array}\right. \quad \text{qui équivaut à :} \left\{\begin{array}{l}x = x_1 \\ \text{ou} \\ x = x_2\end{array}\right.$$

La réciproque est-elle vraie ? Si L'équation $f(x) = 0$ a des solutions, est-ce qu'on peut factoriser f ? On démontrera en exercice que c'est bien le cas.

Résumons :

Propriété 3
Soit f une fonction polynôme du second degré. Il y a équivalence entre :
- f admet une forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$
- l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions x_1 et x_2.

3 Signe d'une fonction polynôme sous forme factorisée

Soit f telle que : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. En convenant que $x_1 < x_2$, on obtient :

x		x_1		x_2	
$(x - x_1)$	$-$	0	$+$		$+$
$(x - x_2)$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

4 Forme canonique

Soit $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme du second degré.

Définition 2
Une expression de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ s'appelle la **forme canonique** de f.

Exemple : $x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 9$

Remarque : $f(\alpha)$ est l'extremum de f (minimum ou maximum suivant que a est positif ou négatif) et α est la valeur de x pour laquelle le sens de variation change.

$a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

$a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

Propriété 4
Posons : $\Delta = b^2 - 4ac$
Alors, on a : $ax^2+bx+c = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

Démonstration : il suffit de développer le second membre.

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x^2 + 2\times\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{\Delta}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + 2a\times\frac{b}{2a}x + a\times\frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2-\Delta}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2-b^2+4ac}{4a}$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} = ax^2+bx+c$$

Conséquence : On peut **toujours** écrire un polynôme du second degré sous forme canonique.

5 Équation et factorisation

Soit f telle que $f(x) = ax^2+bx+c$.

Posons comme précédemment : $\Delta = b^2-4ac$. On dit que Δ est le **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c.

Théorème 1
On considère l'équation $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser f.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $f(x) = 0$ a une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Le trinôme se factorise sous la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Démonstration : Utilisons la propriété 4.

$ax^2+bx+c = 0$ est équivalent à : $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$.

Comme $a \neq 0$, c'est équivalent à : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\dfrac{\Delta}{(2a)^2} < 0$ (car le dénominateur est positif), donc $-\dfrac{\Delta}{(2a)^2} > 0$.
  Comme un carré est toujours positif, alors : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$.
  Par conséquent, $f(x)$ ne s'annule jamais, et est toujours du signe de a.
  Ainsi, l'équation n'a pas de solution, et on ne peut pas factoriser (d'après la propriété 3).

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation devient : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Ceci est équivalent à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$ et donc à $x = -\dfrac{b}{2a}$.

La forme canonique avec $\Delta = 0$ s'écrit : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, et $f(x)$ est toujours du signe de a.

- Si $\Delta > 0$, alors il a une racine carrée.
  Alors, on obtient en utilisant l'identité remarquable :
  $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
  Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, x_1 et x_2, telles que :
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  On peut aussi écrire :
  $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$

  Ainsi, f admet une forme factorisée.

Exemples :

- $-6x^2 + x + 1 = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25.$ $\Delta > 0$, donc deux solutions :
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 - 5}{-12} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 + 5}{-12} = -\dfrac{1}{3}$
  $S = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = -6\left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4.$ $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.
  $S = \varnothing$ et f ne se factorise pas
- $2x^2 + 5x + \dfrac{25}{8} = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times \dfrac{25}{8} = 0.$ $\Delta = 0$, il y a une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5}{4}$
  $S = \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$ et la forme factorisée de f est : $f(x) = 2\left(x + \dfrac{5}{4}\right)^2$

6 Représentation graphique

La représentation graphique d'un trinôme du second degré est une parabole. L'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$.