Correction du devoir n°2

Exercice 1 :

1) *a*)

(E₁) : $x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$. Si on tient à sortir la grosse artillerie, on calcule :

Δ = 36, d'où deux solutions : $x_1=\dfrac{(6+6)}{(2\times 1)}$ =6 et $x_2=\dfrac{(6-6)}{(2\times 1)}$ =0.

(E₂) : Mettons qu'on n'a pas remarqué qu'il s'agit d'une identité remarquable évidente du genre $(x-3)^2$.
On calcule : $\Delta = (-6)^2-4\times 1\times 9=0$, d'où une solution : $x_1=\dfrac{6}{(2\times 1)}$ =3.

(E₃) : $\Delta = (-6)^2-4\times 1\times 15 = -24$; Δ est négatif, donc il n'y a pas de solutions.

b) On sait que le nombre de solution dépend du signe de Δ ; on va donc calculer celui-ci en fonction de *m*.
$\Delta = (-6)^2-4\times 1\times m = 36-4m = 4(9-m)$. Donc Δ est du signe de $9-m$.

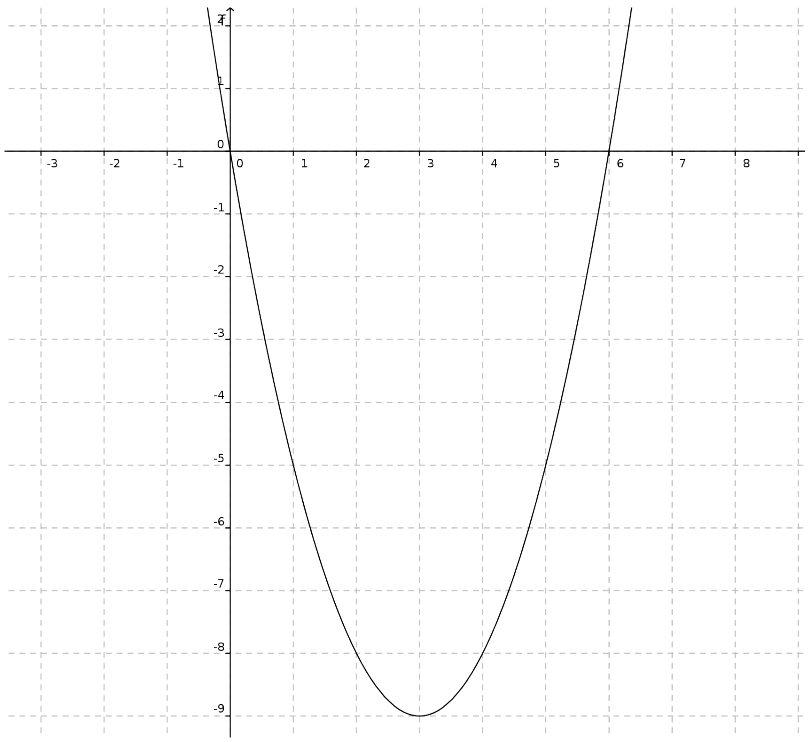
Par conséquent :
Si $m < 9$ alors $9-m > 0$ donc $\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions.
Si $m = 9$ alors $9-m = 0$ donc $\Delta = 0$ donc l'équation a une solution.
Si $m > 9$ alors $9-m < 0$ donc $\Delta < 0$ donc l'équation n'a aucune solution.

2) *a*) La parabole est tournée vers le haut car *a* est positif ($a = 1$) ; l'abscisse du sommet est $-\dfrac{b}{2a}$ =3.

On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

b) La courbe :



c) Posons $g(x) = f(x) + m = x^2 - 6x + m$. Alors la courbe C_g se déduit de C_f par une translation de vecteur $m\vec{j}$.
Comme le sommet S de la parabole C_f a pour coordonnées (3 ; –9), on obtient les 3 cas suivants :

Si $m < 9$, le sommet S' de C_g est au-dessous de l'axe des abscisses, donc la parabole C_g coupe celui-ci en deux points.
Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation $g(x)=0$. Donc l'équation (E) a deux solutions.

Si $m = 9$, le sommet S' se trouve exactement sur l'axe des abscisses, donc l'abscisse de S' est l'unique nombre x vérifiant $g(x) = 0$. Donc l'équation (E) a une seule solution.

Si $m > 9$, le sommet S' se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, donc C_g ne contient aucun point d'ordonnée 0, donc l'équation (E) : $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Exercice 2 :

D'abord, on détermine la valeur interdite qui est 1.

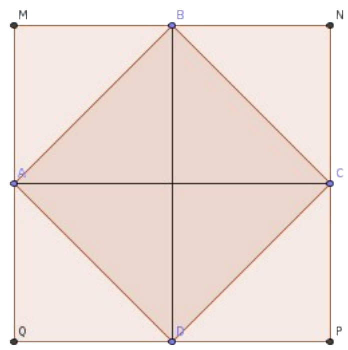
$\frac{x^2+x}{x-1} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} - \frac{6(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-6x+6}{x-1} > 0 \Leftrightarrow$ $\frac{x^2-5x+6}{x-1} > 0$. On étudie le signe de ce quotient ; pour cela, il faut déterminer si le trinôme au numérateur a des racines.

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 1$
Donc deux racines : $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Le signe est celui de a (+, donc) sauf entre les racines.
On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+		+	0	–	0	+	
$x-1$		–	0	+		+		+	
$\frac{x^2-5x+6}{x-1}$		–	‖	+	0	–	0	+	

Le quotient doit être strictement positif, donc on obtient l'ensemble solution : $S =]1\ ;\ 2[\cup]3\ ;+\infty[$.

Exercice 3 :



a) x varie dans [0 ; 1]. Pas dur.
b) Il y a plusieurs façon de faire. Par exemple, on peut compléter le carré ABCD pour former le carré MNPQ ci-contre. On voit facilement, d'une part que la longueur des diagonales de ABCD est égale à la longueur des côtés de MNPQ, et d'autre part que l'aire de ABCD est la moitié de l'aire de MNPQ.

Donc : Aire(ABCD) = $\frac{AC^2}{2}$. Autrement dit, l'aire d'un carré vaut la moitié du carré de la longueur d'une diagonale.

On peut aussi se souvenir que la longueur de la diagonale est la longueur du côté multipliée par $\sqrt{2}$.
Donc $AC = \sqrt{2}\times AB$ soit : $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}}$
Alors : Aire (ABCD) = $AB^2 = \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{AC^2}{2}$.

Et si on ne souvient pas que $AC=\sqrt{2}\times AB$, on le retrouve grâce au théorème de Pythagore. C'est ce que proposait l'énoncé :
Comme ABC est rectangle en B, on a $AB^2+BC^2=AC^2$, et comme $AB=BC$, cela donne : $2AB^2=AC^2$.

Bref, on a : Aire (ABCD) = $\dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{x^2}{2}$.
On a d'autre part : $CF=1-AC$, et donc, par le même raisonnement que précédemment :

Aire (CEFG) = $\dfrac{CF^2}{2} = \dfrac{(1-x)^2}{2}$.

c) L'aire de la partie grisée est donc : $A(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(1-x)^2}{2} = \dfrac{x^2+1-2x+x^2}{2} = \dfrac{2x^2-2x+1}{2} = x^2-x+\dfrac{1}{2}$.

d) $A(x)$ est un trinôme. On a : $a=1$ et $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$, donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$A(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

e) Au vu du tableau, l'aire est minimale pour $x=\dfrac{1}{2}$ et maximale pour $x = 0$ ou 1.