Correction du devoir surveillé n° 1

Première E3

Exercice 1 :

1. $3x^2 - 42x + 147 = 0$

   $\Delta = 0$ donc il y a une solution.

   $x1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{42}{2 \times 3} = 7$

   Vérification : $3 \times 7^2 - 42 \times 7 + 147 = 147 - 294 + 147 = 0$

   $\boxed{\mathscr{S} = \{7\}}$

2. $-4x^2 + 72x - 325 = 0$

   $\Delta = -16$ donc il n'y a pas de solution.

   $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$

3. $4x^2 - 8x - 21 = 0$

   $\Delta = 400$ donc il y a deux solutions.

   $x1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 - 20}{2 \times 4} = \dfrac{-12}{8} = -\dfrac{3}{2}$

   $x2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 + 20}{2 \times 4} = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2}$

   Vérification : $4 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 8 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) - 21 = 4 \times \dfrac{9}{4} + 12 - 21 = 9 + 12 - 21 = 0$

   $4 \times \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - 8 \times \left(\dfrac{7}{2}\right) - 21 = 4 \times \dfrac{49}{4} - 28 - 21 = 49 - 28 - 21 = 0$

   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right\}}$

4. $x^2 + 5x = 3x + 15$

   L'équation peut se réécrire : $x(x + 5) = 3(x + 5)$

   Soit : $x(x + 5) - 3(x + 5) = 0$

   $(x - 3)(x + 5) = 0$

   C'est une équation-produit nul ; donc : $\left\{\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x + 5 = 0 \end{array}\right.$ soit : $\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{array}\right.$

   Vérification facile.

   $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\,;3\}}$

Exercice 2 :

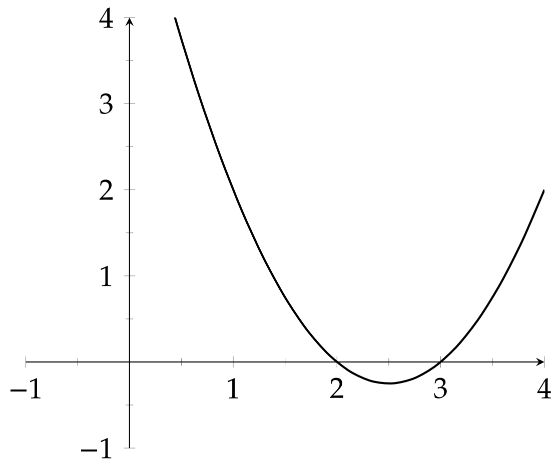
1. $x^2 - 5x + 6 < 0$

   Supposons que ce polynôme a deux racine x_1 et x_2 ; on a alors : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 5$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = 6$

   On trouve facilement : $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. Donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

   Il faut à présent étudier le signe de ce polynôme.

   Plusieurs méthodes sont utilisables, comme on l'a vu en cours. Personnellement, j'aime bien les dessins.



On voit que le tableau de signe de notre polynôme est le suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\mathscr{S} =]2\,;3[}$

2. $9x^2 + 30x + 26 \geq 0$
   Pas de factorisation évidente. Calculons le discriminant.
   $\Delta = -36$. Pas de racine.
   Ceci implique, comme on l'a vu, que le trinôme garde un signe constant (celui de a).
   Ainsi, le tableau de signe de notre polynôme est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Par conséquent, pour tout x réel, $9x^2 + 30x + 26 \geq 0$.

Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$

Exercice 3 :

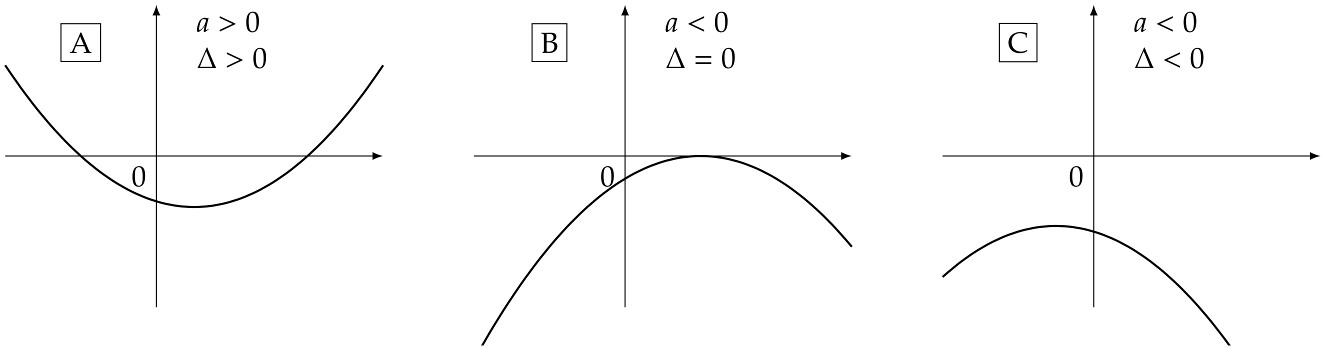
$f(x) = 5x^2 + 40x + 83$.

1. $a > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut. L'extremum est donc ici un minimum.
   L'antécédent du maximum est : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -4$.
   $f(-4) = 5 \times (-4)^2 + 40 \times (-4) + 83 = 3$
   On obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

2. D'après le tableau, $f(x) \geq 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Exercice 4 :



Exercice 5 :

Soient x et y les longueurs des côtés de l'angle droit.

Le périmètre étant de 84 cm, on a : $x + y + 37 = 84$ et donc : $x + y = 47$.

Par ailleurs, comme le triangle est rectangle en A, le théorème de Pythagore nous affirme que : $x^2 + y^2 = 37^2$, soit : $x^2 + y^2 = 1369$

On obtient le système : $\begin{cases} x + y = 47 \\ x^2 + y^2 = 1369 \end{cases}$

Exprimons par exemple y en fonction de x en utilisant la première ligne : $y = 47 - x$; et reportons dans la seconde ligne :

$x^2 + (47 - x)^2 = 1369$

Soit : $x^2 + 47^2 - 2 \times 47 \times x + x^2 = 1369$

$2x^2 - 94x + 2209 = 1369$

$2x^2 - 94x - 840 = 0$

On peut simplifier cette équation en divisant la ligne par 2 : $x^2 - 47x + 420 = 0$.

Pas de factorisation évidente. Calculons le discriminant.

$\Delta = 529$ Donc, deux solutions.

$$x_1 = \frac{47 - \sqrt{529}}{2} = \frac{47 - 23}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{47 + \sqrt{529}}{2} = \frac{47 + 23}{2} = 35$$

Si $x = 12$, alors $y = 47 - 12 = 35$. Vérifions que l'hypoténuse est correcte : $12^2 + 35^2 = 1369 = 37^2$. Ça marche.

Si $x = 35$, alors $y = 47 - 35 = 12$, et le calcul précédent montre que cette solution est correcte.

Ainsi, les deux petits côtés de ce triangle ont pour longueur 12 cm et 35 cm.