Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1 :

1. $5x^2 - 6x + 1 = 0$
   $\Delta = 16$, donc il y a deux solutions (deux racines).
   $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{16}}{2\times 5} = \dfrac{6-4}{10} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$
   $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{16}}{2\times 5} = \dfrac{6+4}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$
   Vérifions :
   $5x_1^2 - 6x_1 + 1 = 5 \times \dfrac{1}{25} - 6 \times \dfrac{1}{5} + 1 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{6}{5} + 1 = -\dfrac{5}{5} + 1 = 0$
   $5x_2^2 - 6x_2 + 1 = 5 \times 1 - 6 \times 1 + 1 = 5 - 6 + 1 = 0$

2. $3x^2 - 5x + 9 = 0$
   $\Delta = -83$, donc il n'y a pas de solution (pas de racine).

3. $5x^2 - 30x + 50 = x^2 - 2x + 1$
   On déplace les nombres du membre de droite :
   $5x^2 - 30x + 50 - x^2 + 2x - 1 = 0$
   $4x^2 - 28x + 49 = 0$
   $\Delta = 0$, donc il y a une solution (une racine).
   $x_0 = \dfrac{28}{2\times 4} = \dfrac{7}{2}$
   Vérifions :
   $4x_0^2 - 28x_0 + 49 = 4 \times \dfrac{49}{4} - 28 \times \dfrac{7}{2} + 49 = 49 - 98 + 49 = 0$

Exercice 2 :

1. $6x^2 + 7x - 5 < 0$
   $\Delta = 169$. Il y a donc deux racines.
   $x_1 = \dfrac{-7-\sqrt{169}}{2\times 6} = \dfrac{-7-13}{12} = \dfrac{-20}{12} = -\dfrac{5}{3}$
   $x_2 = \dfrac{-7+\sqrt{169}}{2\times 6} = \dfrac{-7+13}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$
   $a > 0$, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$6x^2+7x-5 < 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit l'ensemble solution : $\mathscr{S} = \left]-\dfrac{5}{3} ; \dfrac{1}{2}\right[$

2. $10x^2 - x - 21 \geq 0$
   $\Delta = 841$. Il y a donc deux racines.
   $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{841}}{2\times 10} = \dfrac{1-29}{20} = \dfrac{-28}{20} = -\dfrac{7}{5}$
   $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{841}}{2\times 10} = \dfrac{1+29}{20} = \dfrac{30}{20} = \dfrac{3}{2}$
   $a > 0$, donc le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$10x^2 - x - 21 < 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble solution : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\frac{7}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

Exercice 3 :

1. Comme $a = 4$ est positif, la fonction f est d'abord décroissante, puis croissante.
   La valeur pour laquelle se produit le changement de variation est : $x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$.
   On obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	

2. S'il existe un point d'intersection A de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite d, alors A appartient à la fois à $\mathcal{C}$ et à d, donc ses coordonnées vérifient à la fois les deux conditions :
   $y_A = f(x_A)$
   $y_A = 2x_A + 6$
   Il s'agit donc de résoudre l'équation : $f(x) = 2x + 6$, soit $4x^2 + 10x + 1 = 2x + 6$.
   On déplace d'abord les nombres du second membre :
   $4x^2 + 8x - 5 = 0$
   $\Delta = 144$. Deux racines.
   $x_1 = \frac{-8 - \sqrt{144}}{2 \times 4} = \frac{-8 - 12}{8} = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2}$
   $x_2 = \frac{-8 + \sqrt{144}}{2 \times 4} = \frac{-8 + 12}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
   Il y a donc deux points d'intersection, A d'abscisse $-\frac{5}{2}$ et B d'abscisse $\frac{1}{2}$.
   Calculons l'ordonnée de ces points de deux façons, ce qui permettra aussi de vérifier.
   $y_A = f\left(-\frac{5}{2}\right) = 4 \times \frac{25}{4} - 10 \times \frac{5}{2} + 1 = 1$ et $y_A = 2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 6 = 1$. Ça marche.
   $y_B = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{4} + 10 \times \frac{1}{2} + 1 = 7$ et $y_B = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 6 = 7$. Ça marche aussi.
   Il y a donc deux points d'intersection, qui ont pour coordonnes $\left(-\frac{5}{2}\,;1\right)$ et $\left(\frac{1}{2}\,;7\right)$

Exercice 4 :

1. L'aire du carré AEFG est x^2 cm^2 (côté $\times$ côté.)
   Le triangle BCF a pour base 10 cm et pour hauteur $10 - x$ cm.
   Donc son aire est $\frac{10(10 - x)}{2} = 5(10 - x)$ cm^2.
2. On cherche donc la valeur x telle que : $5(10 - x) = 3x^2$.
   C'est équivalent à $3x^2 - 5(10 - x) = 0$ soit $3x^2 + 5x - 50 = 0$.
3. On résout cette équation :
   $\Delta = 625$. Deux racines.
   $x_1 = \frac{-5 - 25}{2 \times 3} = \frac{-30}{6} = -5$

$x_2 = \dfrac{-5+25}{2\times 3} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$
Dans ce contexte, x ne peut pas être négatif (c'est une distance). Donc on élimine la solution -5.
On peut donc conclure : pour que l'aire du triangle BCF soit égale à trois fois l'aire du carré AEFG, il faut que AE soit de $\dfrac{10}{3}$ cm.
Vérifions en calculant l'aire de AEFG et BCF dans ce cas.
L'aire de AEFG est $\left(\dfrac{10}{3}\right)^2 = \dfrac{100}{9}$
L'aire de BCF est : $\dfrac{10\left(10-\frac{10}{3}\right)}{2} = 5\times\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{100}{3}$.
L'aire de BCF est bien 3 fois l'aire de AEFG.