Corrigé du devoir surveillé n° 2

Première E3

Exercice 1 :

1. Bien sûr, on a ici une situation d'équiprobabilité : la probabilité de sortie d'un jeton est la même pour tous.

   Il y a 10 jetons en tout, dont 7 blancs.

   Le nombre de cas possibles est donc : $10 \times 9 = 90$ (10 choix possibles pour le premier jeton et 9 pour le second).

   Le nombre de cas favorables est $7 \times 6 = 42$ (7 choix possibles pour le premier jeton et 6 pour le second).

   Donc $\boxed{P(A) = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}}$.

   Remarque : On peut aussi utiliser un arbre pour répondre à cette question.

2. Il y a 6 jetons portant un numéro impair (1-3-5-7 chez les blancs et 1-3 chez les noirs.) Le nombre de cas possibles est toujours 90. Le nombre de ces favorables est $6 \times 5 = 30$.

   Donc $\boxed{P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}}$

3. Calculons d'abord $P(A \cap B)$.

   $A \cap B$ est l'événement : « obtenir deux jetons blancs **et** portant un numéro impair ».

   Il y a 4 jetons blancs et portant un numéro impair, donc le nombre de cas favorables est $4 \times 3 = 12$. Le nombre de cas possibles est toujours 90.

   Donc $P(A \cap B) = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

   D'autre part, d'après les questions précédentes : $P(A) \times P(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$.

   On voit que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$. Donc les événements A et B $\boxed{\text{ne sont pas indépendants}}$.

Exercice 2 :

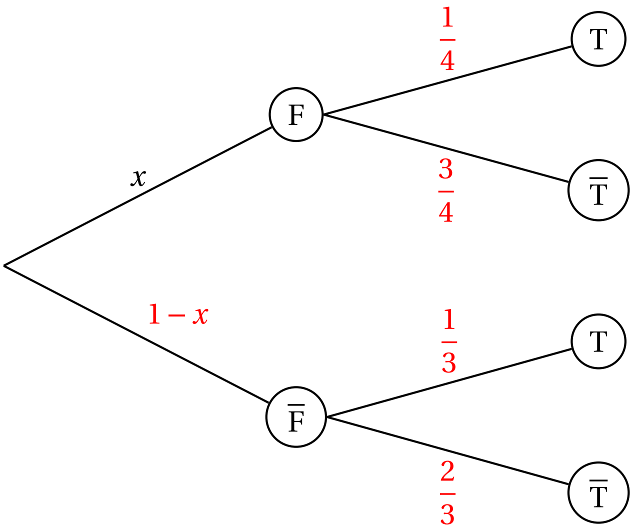
1. Commençons par traduire les informations de l'énoncé :

   « un quart des femmes adhère à la section tennis » : $P_F(T) = \frac{1}{4}$ (si on choisit au hasard quelqu'un parmi les femmes, la probabilité qu'elle soit adhérente à la section tennis est un quart).

   « un tiers des hommes adhère à la section tennis » : $P_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$ (si on choisit au hasard quelqu'un parmi les hommes, la probabilité qu'il soit adhérent à la section tennis est un tiers).

   « 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis » : $P(T) = \frac{30}{100}$.

   On obtient :



2. On applique le principe des probabilités totales :
   $P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \overline{F}) = P(F) \times P_F(T) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(T)$
   Ici :
   $P(T) = x \times \frac{1}{4} + (1-x) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)x$
   $P(T) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}x$

3. On sait d'après l'énoncé que $P(T) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.
   On a deux expressions de $P(T)$. On peut donc écrire : $\frac{1}{3} - \frac{1}{12}x = \frac{3}{10}$.
   Il reste à résoudre cette équation.
   $\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{12}x$
   $\frac{1}{30} = \frac{1}{12}x$
   $\frac{1}{30} \times \frac{12}{1} = x$
   $\frac{12}{30} = x$
   $x = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

   On a bien trouvé : $x = P(F) = \frac{2}{5}$.

4. Traduisons : L'énoncé demande le calcul de $P_T(F)$.

   $P_T(F) = \frac{P(T \cap F)}{P(T)}$.

   $P(T) = \frac{3}{10}$, d'après l'énoncé.

   $P(T \cap F) = P(F) \times P_F(T) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, d'après la question précédente.

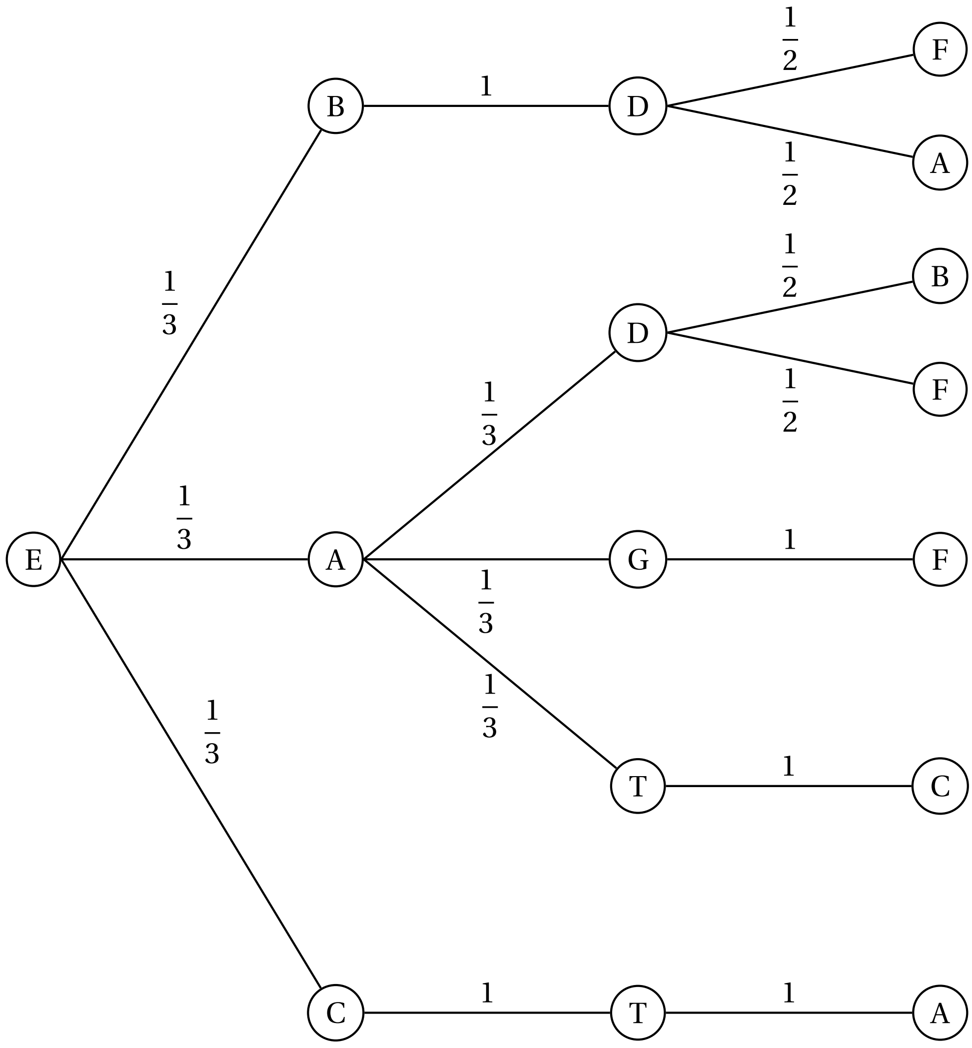
   Ainsi, $P_T(F) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}$.

La probabilité cherchée est donc : $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

Exercice 3 :

1. La première salle visitée est E. Pas d'autre choix. À partir de E, le visiteur peut aller (avec la même probabilité) en B, A, ou C. Voilà notre premier niveau.
   Arrivé en B, un seul choix : D (puisque le visiteur ne repasse pas par la porte qu'il a utilisée pour entrer).
   Arrivé en A, trois choix : D, G ou T.
   Arrivé en C, un seul choix : T. Voilà notre deuxième niveau.
   On remplit le dernier niveau suivant le même principe.

   On obtient :



2. D'après l'arbre, on a : $P(\text{EBDF}) = \dfrac{1}{3} \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$
3. Il y a trois parcours pour lesquels la dernière salle visitée est F : EBDF, EADF et EAGF.

   Donc, P(« La quatrième salle du trajet est F ») $= P(\text{EBDF}) + P(\text{EADF}) + P(\text{EAGF})$

   $P(\text{EBDF}) = \dfrac{1}{6}$, d'après la question précédente.

$P(\text{EADF}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{18}$.

$P(\text{EAGF}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{9}$.

Ainsi, $p_1 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{18} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{2}{18} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

La probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F » est $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

4. D'après notre arbre, il y a deux trajets correspondant à l'événement donné : EATC et ECTA.

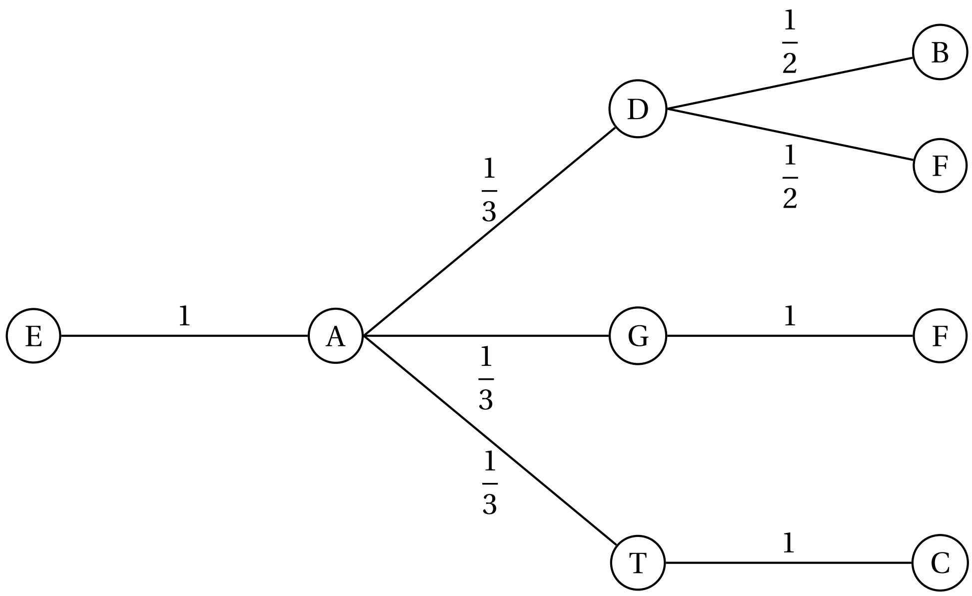
$P(\text{EATC}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{9}$

$P(\text{ECTA}) = \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{3}$

Donc $p_2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$

La probabilité p_2 de l'évènement : « Le trajet passe par la salle T » est $\boxed{\dfrac{4}{9}}$.

5. La décision du directeur impose que les deux premières salles visitées soient E et A. Par conséquent, on est conduit à modifier l'arbre de la question 1 de la façon suivante (on coupe les deux branches EB et EC) :



Calculons dans ce nouveau cas de figure la probabilité de l'événement « Le trajet passe par la salle T ». Il y a un seul trajet qui correspond, c'est EATC.

$P(\text{EATC}) = 1 \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$

On trouve donc $\dfrac{1}{3}$ au lieu de $\dfrac{4}{9}$ auparavant. Or $\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{9} < \dfrac{4}{9}$.
Ainsi, la probabilité qu'un visiteur passe par la salle T (en gardant les hypothèses précédentes) a diminué. Le directeur a manifestement tort.