Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1. $E(X) = -3 \times 0{,}1 - 2 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}3 + 3 \times 0{,}2 + 7 \times 0{,}1 = 1$.
2. $V(X) = 0{,}1 \times (-3-1)^2 + 0{,}3 \times (-2-1)^2 + 0{,}3 \times (2-1)^2 + 0{,}2 \times (3-1)^2 + 0{,}1 \times (7-1)^2 = 9$.
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3$.

Exercice 2 :

1. L'arbre est en page 3.
2. D'après la propriété du cours :
   La probabilité que le joueur gagne est $P(B,J,R) = P(B) \times P(J) \times P(R) = 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}03125$.
   En écriture factionnaire : $P(B,J,R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

   La probabilité de gagner à ce jeu est donc $\boxed{0{,}03125}$.
3. La liste doit comporter les trois couleurs, dans n'importe quel ordre. On voit que ceci correspond à six trajets possibles sur l'arbre.
   On peut aussi le compter directement. En effet, il y a trois choix pour la première couleur, deux choix pour la deuxième (on élimine la couleur qui a déjà été choisie) et un seul choix pour la troisième (il reste une seule couleur non utilisée).
   Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilités : (R,B,J),(R,J,B),(B,R,J),(B,J,R),(J,B,R) et (J,R,B).
   Tous ces événements sont incompatibles et ont la même probabilité : $P(R,B,J) = P(R) \times P(B) \times P(J) = 0{,}5 \times 0{,}25 \times 0{,}25$.
   On calcule : $6 \times 0{,}5 \times 0{,}25^2 = 0{,}1875$.

   La probabilité d'obtenir trois couleurs différente est donc $\boxed{0{,}1875}$.
4. L'événement « le joueur obtient trois couleurs identiques » est la réunion de (R,R,R), (B,B,B) et (J,J,J) et ces trois événements sont incompatibles.
   La probabilité cherchée est donc :
   $$\begin{aligned} P\left((R,R,R) \cup (B,B,B) \cup (J,J,J)\right) &= P(R,R,R) + P(B,B,B) + P(J,J,J) \\ &= 0{,}5^3 + 0{,}25^3 + 0{,}25^3 = 0{,}15625 \end{aligned}$$

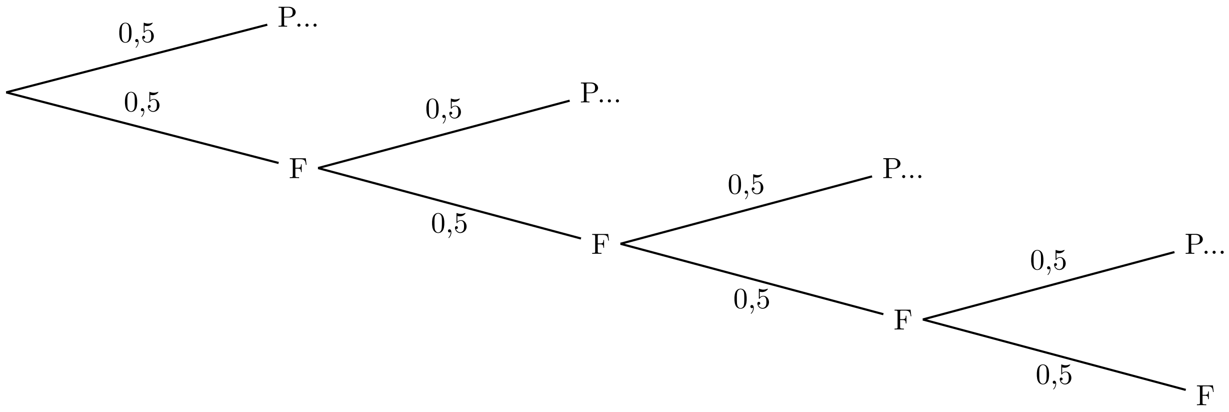
   La probabilité d'obtenir trois couleurs identiques est donc $\boxed{0{,}15625}$.
5. La probabilité que la roue indique une autre couleur que le bleu est : $P(\bar{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
   D'autre part, l'événement : « la couleur "Bleu" n'apparaît pas » est : $(\bar{B},\bar{B},\bar{B})$.
   Sa probabilité est : $P(\bar{B},\bar{B},\bar{B}) = P(\bar{B}) \times p(\bar{B}) \times P(\bar{B}) = 0{,}75^3 = 0{,}421875$.

   La probabilité que la couleur « Bleu » n'apparaisse pas est donc $\boxed{0{,}421875}$.
6. Soit A : « la couleur "Bleu" apparaît au moins une fois » ; A est l'événement contraire de $\bar{A}$: « la couleur "Bleu" n'apparaît pas ». On a calculé la probabilité de $\bar{A}$ à la question précédente.
   On obtient : $P(A) = 1 - P(\bar{A} = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125$.

   Ainsi, la probabilité que la couleur « Bleu » apparaisse au moins une fois est $\boxed{0{,}578125}$.

Exercice 3 :

1. On note P l'événement ≪ la pièce tombe sur *pile* ≫ et F l'événement ≪ la pièce tombe sur *face* ≫.



   On remarque qu'il n'y a pas besoin de dessiner les branches partant d'un P, car ce qui suit n'a pas d'influence sur les valeurs prises par X ni sur leur probabilité.

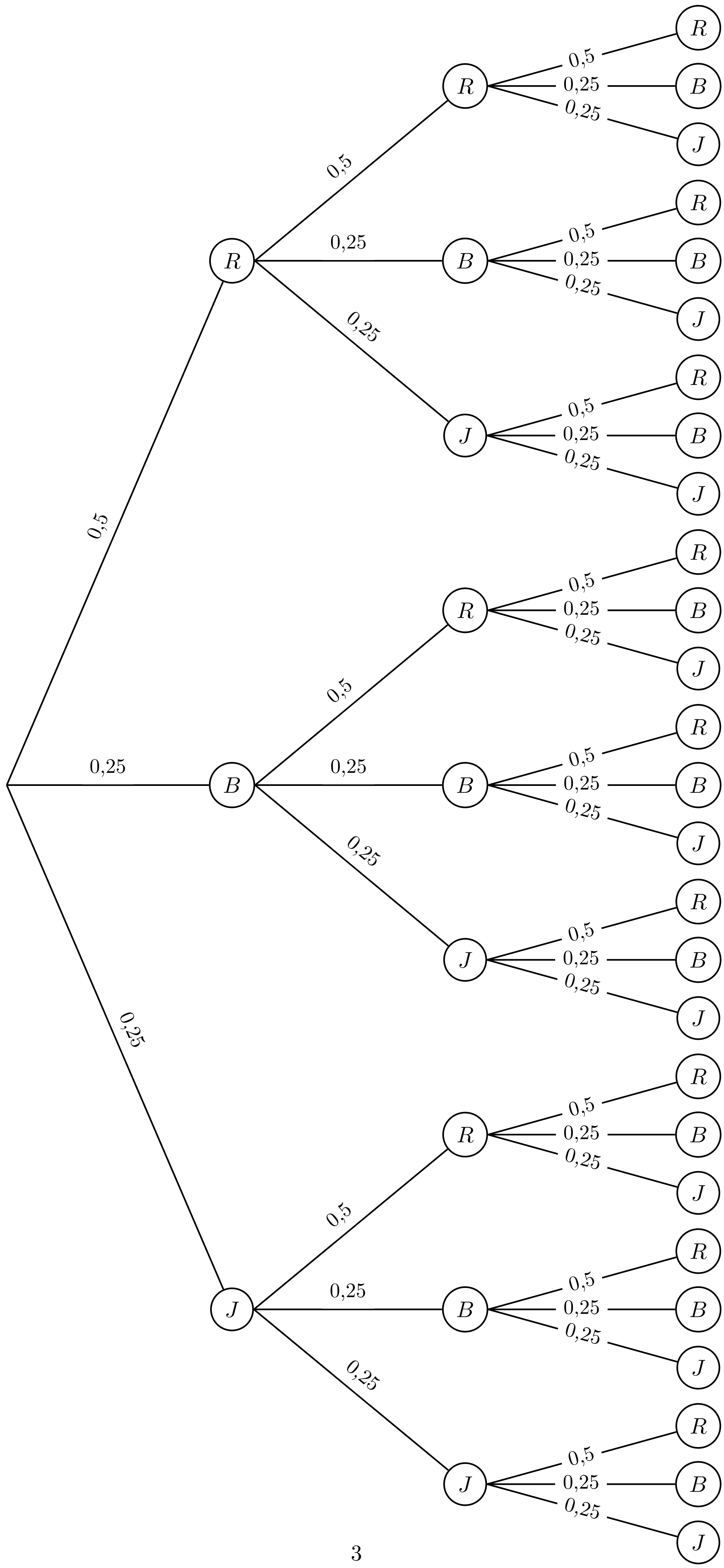
2. On voit facilement que :
   $P(X = 1) = P(\text{P}) = 0{,}5$.
   $P(X = 2) = P(\text{F,P}) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$.
   $P(X = 3) = P(\text{F,F,P}) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$.
   $P(X = 4) = P(\text{F,F,F,P}) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}0625$.
   $P(X = 0) = P(\text{F,F,F,F}) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}0625$.

   On obtient :

x_i	1	2	3	4	0
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

   On peut vérifier que la somme des probabilités fait bien 1.

3. $E(X) = 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}125 + 4 \times 0{,}0625 + 0 \times 0{,}0625 = 1{,}625$
   L'espérance de X est $\boxed{1{,}625}$.


0,5
0,25
0,25
R
B
J
0,5
0,25
0,25
R
B
J
R
B
J
R
B
J
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
0,5
0,25
0,25
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J
R
B
J