Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 :

1. Le choix d'une personne est une expérience à deux issues (épreuve de Bernoulli) : la personne possède un ordinateur ou non.

   En interrogeant 10 personnes, on répète 10 fois cette expérience de façon indépendante (ceci constitue un schéma de Bernoulli).

   La variable aléatoire qui compte le nombre de personnes possédant un ordinateur parmi les dix personnes interrogées suit donc une loi binomiale, de paramètres $n = 10$ (car on répète 10 fois le choix d'une personne) et $p = 0{,}74$ (car 74% des habitants possèdent un ordinateur).

2. On sait que $P(X = 10) = 0{,}74^{10} \simeq 0{,}04923990397355877$.

   Arrondissant à 10^{-4}, on trouve :
   $$\boxed{P(X = 10) \simeq 0{,}0492}$$

3. On sait que $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}74^3 \times 0{,}26^7 \simeq 0{,}0039056186961113097$. On peut aussi utiliser directement la calculatrice.

   Arrondissant à 10^{-4}, on trouve :
   $$\boxed{P(X = 3) \simeq 0{,}0039}$$

4. On cherche $P(X \geq 2)$. Le calcul de $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, ... jusqu'à $P(X = 10)$ étant fastidieux, il vaut mieux passer par l'événement contraire.

   $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \simeq 0{,}9999584100018191$

   Arrondissant à 10^{-4}, on trouve :
   $$\boxed{P(X \geq 2) \simeq 1}$$

5. $$\boxed{E(X) = np = 7{,}4}$$

   C'est le nombre moyen de personnes possédant un ordinateur dans un groupe de dix personnes choisies au hasard.

Exercice 2 :

1. On trouve $\boxed{n = 200}$ et $\boxed{p = 0{,}05}$.

   En effet, on a choisi 200 fois de suite (de façon indépendante) un objet; et la probabilité qu'un objet choisi au hasard présente un défaut est de $5\% = 0{,}05$.

2. On peut utiliser la calculatrice, on trouve : $\boxed{P(X = 0) = 0{,}95^{200} \simeq 3{,}5 \times 10^{-5}}$

3. $P(X = 1) = \binom{200}{1} \times 0{,}05 \times 0{,}95^{199} \simeq 0{,}00036897543419819683$

   Ainsi :
   $$\boxed{P(X = 1) \simeq 0{,}0004}$$

4. $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \simeq 0{,}00904837639610146$
   $$\boxed{P(X \leq 3) \simeq 0{,}009}$$

Exercice 3 :

1. Comme pour l'exercice 1, on voit qu'on répète de façon indépendante (car le tirage s'effectue avec remise) une expérience à deux issues : la boule tirée est verte, ou non.
   La variable aléatoire X comptant le nombre de boules vertes parmi les 20 boules tirées suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$ (car il y a autant de boules vertes que de boules rouges.)
2. On cherche $P(X = 10) = \binom{20}{10} \times 0{,}5^{20} = 184756 \times 0{,}5^{20} \simeq 0{,}17619705200195312$

   $$P(X = 10) \simeq 0{,}1762$$

   Déterminons la loi de probabilité de Y. Les valeurs prises sont 5, avec une probabilité de 0,1762 environ (d'après la question précédente) et -1 avec la probabilité $1 - 0{,}1762 = 0{,}8238$.

y	5	-1
$P(Y = y)$	0,1762	0,8238

   Ainsi, $E(Y) \simeq 5 \times 0{,}1762 - 1 \times 0{,}8238 \simeq 0{,}0572$.

   $$E(Y) \simeq 0{,}06$$

   L'espérance du gain algébrique étant (légèrement) positive, on a intérêt à jouer à ce jeu. (Mais il ne faut pas s'attendre à devenir millionnaire...)

Exercice 4 :

1. Pour gagner le tournoi, il faut que A gagne au moins 4 parties sur les sept.
   Appelons X la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées par A. On peut supposer que les résultat de chaque partie est indépendant des autres.
   On répète donc sept fois de façon indépendante une expérience à deux issues. On en déduit que X suit la loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = 0{,}6$.
   On calcule : $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X = 0) - P(x = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - P(X \leq 3) = 0{,}710208$

   $$P(X \geq 4) \simeq 0{,}7102$$

2. - Si A et B disputent 9 parties :
     Appelons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées par A. Par le même raisonnement que précédemment, on voit que Y suit la loi binomiale de paramètre $n = 9$ et $p = 0{,}6$.
     Cette fois, A doit gagner au moins 5 parties pour gagner.
     On calcule : $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0{,}73343232$

     $$P(X \geq 5) \simeq 0{,}7334$$

   - Si A et B disputent 21 parties :
     Appelons Z la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées par A. Toujours par le même raisonnement, on voit que Z suit la loi binomiale de paramètre $n = 21$ et $p = 0{,}6$.
     Cette fois, A doit gagner au moins 11 parties pour gagner.
     On calcule : $P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) \simeq 0{,}8256221336382272$

     $$P(X \geq 11) \simeq 0{,}8256$$

     On peut remarquer que la probabilité que A gagne le tournoi a tendance à augmenter. On peut même démontrer qu'elle tend vers 1 (par exemple, grâce au théorème de Moivre-Laplace, au programme de terminale...)