Correction du devoir surveillé sur les probabilités

Exercice 1 :

1. Le dé est truqué, donc il n'y a pas équiprobabilité... On utilise comme d'habitude le fait que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.

   On a donc : $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$ soit $3p(1) + 2\times2p(1) + 3p(1)=1$ et donc : $10p(1)=1$.

   Conclusion : $p(1) = 0{,}1$. On en déduit : $p(6) = 0{,}3$.

2. L'événement A se décompose en 3 év. élémentaires : « obtenir le 2 », « obtenir le 4 », « obtenir le 6 ». On a donc : $p(A) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$

Exercice 2 :

Il s'agit d'utiliser les formules ensemblistes.
Comme A et B sont incompatibles, alors $A\cap B = \emptyset$; donc $p(A \cap B) = 0$.
Comme A et B sont incompatibles, alors $p(A\cup B) = p(A) + p(B) = 0{,}8$.
Comme $\overline{B}$ est l'événement contraire de B, alors $p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 0{,}7$.

Exercice 3 :

1. On a deux choix pour le premier chiffre : 0 ou 1, puis à nouveau deux choix pour le deuxième et ainsi de suite. On multiplie par 2 autant de fois qu'il y a de chiffres.
   Donc, le nombre d'octets différents qu'on peut former est $2^8 = 256$.

2. On écrit au hasard, donc on est dans un modèle d'équiprobabilité. Pour calculer la probabilité d'un événement, on peut donc utiliser la célèbre formule : $p=\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.
   Le nombre de cas possibles a été calculé précédemment : c'est 2^8.
   Pour que l'événement A soit réalisé :
   Il n'y a qu'un choix favorable pour les deux premiers chiffres (1 et 1). Ensuite, il y a deux choix possibles pour le 3ᵉ chiffre, deux choix pour le 4ᵉ, etc. Il y a donc 2^6 cas favorables correspondant à l'événement A.

   On obtient alors : $p(A)=\dfrac{2^6}{2^8}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

   Pour que l'événement B soit réalisé :
   Il y a deux choix pour le premier chiffre, deux pour le deuxième, …, deux choix pour le septième, puis un seul choix pour le huitième. Il y a donc 2^7 cas favorables pour B.

   On obtient alors : $p(B)=\dfrac{2^7}{2^8}=\dfrac{1}{2}$.

   Pour calculer la probabilité de l'événement $A\cup B$, il est plus judicieux de calculer d'abord la probabilité de $A\cap B$.
   $A\cap B$ est réalisé lorsque A et B sont réalisés en même temps. Autrement dit, on a obtenu un octet dont les deux premiers chiffres sont des 1 et le dernier chiffre est un 0. On compte comme précédemment : un choix pour les deux premiers chiffres, deux pour le troisième, etc., deux pour le septième et un choix pour le huitième. Cela donne : 2^5 cas favorables.

   On obtient donc : $p(A\cap B)=\dfrac{2^5}{2^8}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$.

   Appliquons la formule : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$.

   $p(A\cup B) = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$.

Exercice 4 :

a) On distingue les boules en les numérotant : V_1, V_2, V_3, B_1, B_2. L'univers est donc formés de couples de deux boules : U = {(V_1 ; V_2), (V_1 ; V_3), etc.}

Il y a équiprobabilité, puisque on tire deux boules « au hasard ». On peut donc utiliser la formule habituelle.
Calculons le nombre de cas possibles. On ne peut pas avoir deux fois de suite la même boule puisque on ne remet pas la première dans l'urne (on tire « simultanément »...)
Petite parenthèse :
Je sais ce que vous allez me dire : tirer « simultanément » et tirer « sans remise », ça revient au même, donc mon énoncé est redondant. « Simultanément et sans remise » est un pléonasme.
Je sais, je l'ai fait exprès, pour « enfoncer le clou » comme on dit.

Fin de la petite parenthèse.
On a 5 choix possibles pour la première boule et 4 choix pour la deuxième (puisque la première est déjà sortie). Ça donne : $5\times4 = 20$ cas possibles.

Posons A : « obtenir deux boules de même couleur » ; B : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

Pour A :
Si les deux boules sont vertes, il y a 3 choix pour la première et 2 pour la seconde, donc 6 possibilités,
si les deux boules sont rouges, il y a 2 choix pour la première et 1 pour la seconde, donc 2 possibilités.

Ainsi, $p(\mathrm{A}) = \frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Pour B :

Si on tire dans l'ordre : boule rouge puis boule verte, on a 2 choix pour la première et 3 choix pour la seconde : 6 possibilités,
si on tire dans l'ordre : boule verte puis boule rouge, on a 3 choix pour la première et 2 choix pour la seconde : à nouveau 6 possibilités.

Ainsi, $p(\mathrm{B}) = \frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

Remarque : A et B étant deux événements contraires l'un de l'autre, la somme de leurs probabilités doit être 1. C'est bien le cas, donc on ne s'est sans doute pas trompé.

b) La variable aléatoire X prend les valeurs 5 et –2 avec des probabilités égales à $p(\mathrm{A})$ et $p(\mathrm{B})$.

On a donc la loi de X :

x	-2	5
$p_X(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

On calcule :

$\mathrm{E}(X) = \frac{3}{5}\times(-2)+\frac{2}{5}\times5=0{,}8$

$\mathrm{V}(X) = \frac{3}{5}\times(-2-0{,}8)^2+\frac{2}{5}\times(5-0{,}8)^2=11{,}76$

$\sigma(X) = \sqrt{11{,}76}\approx3{,}43$.

Exercice 5 :

1. On range au hasard des paires de chaussettes dans des tiroirs. Pour ne pas s'embrouiller, le mieux est comme toujours de numéroter.

   A priori, il y a deux façons. On peut numéroter les chaussettes et donner dans l'ordre le contenu du tiroir 1, du tiroir 2, 3, 4. On voit tout de suite que c'est très incommode, car si la paire n°1 est dans le premier tiroir, elle ne peut pas être dans les autres. Il faut donc faire attention, on ne peut pas compter « en aveugle ».

   L'autre façon est de donner dans l'ordre le numéro de tiroir de la paire n°1, le numéro de tiroir de la paire n°2, puis le numéro de tiroir de la paire n°3.

   Notons : T_1 le tiroir n°1, T_2 le tiroir n°2, etc.
   En suivant cette façon de numéroter, on définit un événement élémentaire par un triplé.
   Par exemple : $(T_2 ; T_4 ; T_1)$ signifie « la paire n°1 est dans le tiroir n°2, la paire n°2 est dans le tiroir n°4 et la paire n°3 est dans le tiroir n°1.
   On obtient donc l'univers suivant :
   $U = \{(T_1 ; T_1 ; T_1), (T_1 ; T_1 ; T_2), \ldots (T_2 ; T_1 ; T_1), \ldots (T_3 ; T_1 ; T_1), \ldots (T_4 ; T_4 ; T_4)\}$

   Avec cette façon de définir l'univers, on calcule le nombre de rangements possibles. Il y a 4 choix possibles pour la première paire, 4 choix pour la deuxième, 4 choix pour la troisième.
   Il y a donc $4^3 = 64$ rangements possibles.

   Remarque : si on définit l'univers autrement (ce qui est possible), la façon de compter les rangements possibles change, et on peut trouver un résultat différent.

2. Il y a équiprobabilité puisque on place chaque paire de chaussette au hasard.

   Remarque :
   On voit bien ici l'avantage du choix de l'univers fait à la question 1). En particulier, si on donne les numéros de tiroirs sans ordre, il n'y a plus équiprobabilité.
   $\{T_1 ; T_1 ; T_1\}$ signifie : les trois paires sont dans le tiroir 1 ; $\{T_1 ; T_2 ; T_4\}$ signifie : une paire est dans le tiroir 1, une paire est dans le tiroir 2 et une paire est dans le tiroir 4.
   On remarque alors que par exemple : $\{T_1 ; T_2 ; T_4\} = \{T_2 ; T_1 ; T_4\} = \{T_4 ; T_2 ; T_1\}$, etc.
   Autrement dit, il y a plusieurs façons de disposer les 3 paires dans les tiroirs 1, 2 et 4 (6 façons en tout), tandis qu'il n'y a qu'une façon de disposer les 3 paires dans le tiroir 1.
   Fin de la remarque.

   Comme il y a équiprobabilité, on applique la célèbre formule.
   Soit A : « les trois paires sont chacune dans un tiroir différent ».

   Le nombre de cas possible est 4^3 d'après la question 1).

   Comptons les cas favorables.
   Pour la première paire, il y a 4 tiroirs vides, donc 4 choix possibles.
   Pour la deuxième paire, un tiroir est déjà occupé, donc il reste 3 choix possibles.
   Pour la troisième paire, deux tiroirs sont déjà occupés, donc il reste 2 choix possibles.
   Par conséquent, le nombre de cas favorables est : $4\times3\times2 = 24$

   Ainsi : $p(\mathrm{A})=\dfrac{4\times3\times2}{4^3}=\dfrac{3\times2}{4^2}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$.

3. Soit B : « il y a au moins deux paires dans un même tiroir ».

Comme chaque fois qu'on lit « au moins », il faut considérer l'événement contraire, dont la probabilité est souvent plus facile à calculer (surtout dans les exercices du bac.)

Or $\overline{B}$ est « on ne trouve pas deux paires dans un même tiroir », autrement dit toutes les paires sont dans des tiroirs différents.

Ceci montre que $\overline{B}$ = A.

Par conséquent : $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Remarque : calculer directement $p(B)$ est plus difficile.
D'abord, on peut avoir soit les trois paires dans le même tiroir, soit deux paires dans un tiroir et une paire dans un autre tiroir.

Si les trois paires sont dans le même tiroir, il y a 4 cas possibles : $(T_1 ; T_1 ; T_1)$, $(T_2 ; T_2 ; T_2)$, etc.

S'il y a deux paires dans un même tiroir et une autre paire dans un autre :
D'abord il faut choisir les deux paires qui sont dans le même tiroir. Il y a trois cas possibles : les paires 1 et 2, les paires 1 et 3 ou les paires 2 et 3.

Si on met ensemble les paires 1 et 2, il y a quatre choix possibles pour le tiroir dans lequel on les place, puis trois choix possibles pour le tiroir dans lequel on place la paire 3. Ça donne 12 choix possibles.

Si on met ensemble les paires 1 et 3, on a aussi 12 choix, et de même si on met ensemble les paires 2 et 3.

Conclusion : S'il y a deux paires dans un même tiroir et une autre dans un autre tiroir, on obtient au total : $3 \times 12 = 36$ choix possibles.

Pour avoir deux paires au moins dans un même tiroir, il y a donc au total : 4 + 36 = 40 choix possibles.

Donc $p(B) = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$.
Cette méthode est manifestement plus longue et fastidieuse.