Probabilités discrètes - Première partie

1 Variable aléatoire discrète

1.1 Définition

On adopte la définition suivante (elle sera modifiée et précisée dans l'enseignement supérieur) :

Définition 1
Une **variable aléatoire discrète** est une variable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ... , x_n, chacune avec une certaine probabilité.

C'est l'équivalent d'un caractère quantitatif discret en statistiques. En particulier, on obtient une variable aléatoire en considérant les issues d'une expérience aléatoire dont les résultats sont numériques et en nombre fini (exemple : lancer d'un dé.)

On désigne habituellement une variable aléatoire avec une majuscule : X, Y, etc. La probabilité que X prenne la valeur x_i se note $P(X = x_i)$ (ou parfois $P(x_i)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.)

Définition 2
La **loi de probabilité** d'une v.a. X est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe la probabilité $P(X = x_i)$. On la représente habituellement à l'aide d'un tableau.

Valeur prise	x_1	x_2	...
Probabilité de cette valeur	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...

1.2 Espérance d'une variable aléatoire

C'est l'équivalent de la moyenne en statistiques, les fréquences étant remplacées par les probabilités.

Définition 3
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ... , x_n. **L'espérance** de X, notée $E(X)$ est le nombre :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$$

Autrement dit, on multiplie chaque valeur par sa probabilité et on fait la somme.

Pour alléger les notations, posons : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc. On obtient :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

1.3 Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ... , x_n. On pose comme précédemment : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc.

Définition 4
La variance de X, notée $V(X)$ est le nombre :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2$$

Remarque : $V(X)$ est un nombre positif. En effet, les carrés sont positifs et les probabilités p_i sont des nombres positifs.

Définition 5
L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

1.4 Propriétés

Soient a et b deux nombres réels. On note $aX + b$ la variable aléatoire qui prend les valeurs $ax_1 + b$, $ax_2 + b$, ... , $ax_n + b$ avec les probabilités respectives p_1, p_2, ... , p_n.

Propriété 1

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$
$$V(aX + b) = a^2V(X)$$

Démonstration :
$E(aX + b) = p_1 \times (ax_1 + b) + p_2 \times (ax_2 + b) + \cdots + p_n \times (ax_n + b)$

On développe :

$E(aX + b) = p_1ax_1 + p_1b + p_2ax_2 + p_2b + \cdots + p_nax_n + p_nb$

On factorise par a et b :

$E(aX + b) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n) + b(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$

Or, par définition, $(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n) = E(X)$ et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

On obtient donc la première formule.

Appliquons ce résultat : $ax_1 + b - E(aX + b) = ax_1 + b - aE(X) - b = ax_1 - aE(x) = a(x_1 - E(X))$.

Par conséquent : $p_1(ax_1 + b - E(aX + b))^2 = p_1(a(x_1 - E(X))^2 = a^2p_1(x_1 - E(X))^2$.

On a de même : $p_2(ax_2 + b - E(aX + b))^2 = a^2p_2(x_2 - E(X))^2$, etc.

On obtient donc : $V(aX + b) = a^2p_1(x_1 - E(X))^2 + a^2p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + a^2p_n(x_n - E(X))^2 = a^2V(X)$. ■

2 Répétition d'expériences identiques et indépendantes

2.1 Définition

On peut constituer une nouvelle expérience aléatoire en reproduisant plusieurs fois une expérience aléatoire donnée, en gardant la même procédure. On parle alors de **répétition d'expériences identiques**.

Par exemple : on répète plusieurs fois le lancer d'un dé.

Si le résultat de l'une quelconque de ces expérience ne dépend pas du résultat des autres expériences, on dit qu'elles sont indépendantes les unes des autres et on parle alors de répétitions d'expériences identiques **et indépendantes**.

Par exemple : Si on lance deux fois un dé, le résultat obtenu lors du premier lancer n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième lancer.

Si on tire au hasard deux boules successivement dans une urne contenant une boule blanche et deux boules noires, il y a indépendance si on remet la première boule tirée dans l'urne. Par contre, si on ne remet pas dans l'urne la première boule tirée, il n'y a pas indépendance. En effet, la probabilité d'obtenir une boule blanche lors du premier tirage est $\frac{1}{3}$; mais si la boule blanche a été tirée en premier, la probabilité de tirer à nouveau une boule blanche est de 0 (car alors l'urne ne contient plus que les deux boules noires.)

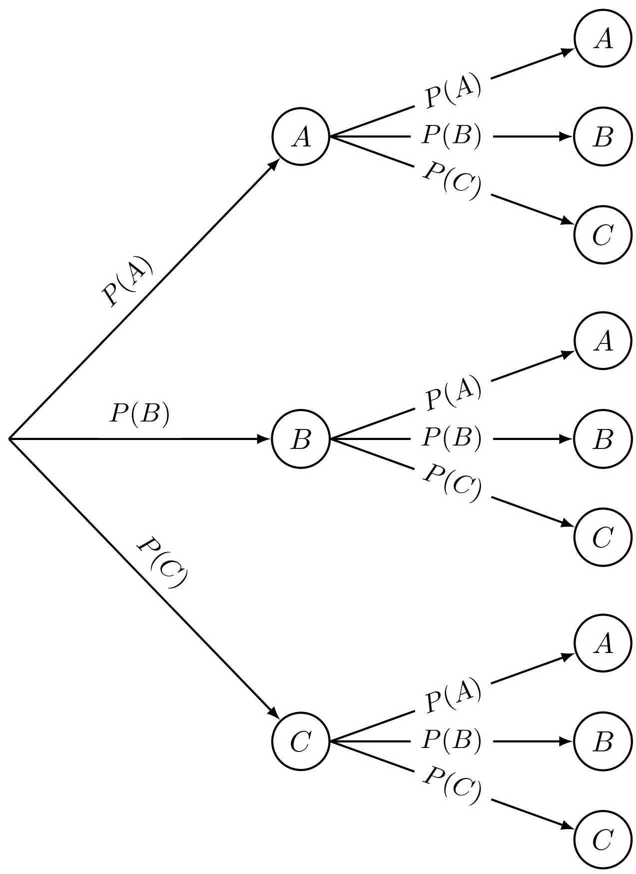
2.2 Propriété

Propriété 2
Dans le cas de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, on admet que la probabilité d'une liste (ordonnée) de résultats est le **produit** des probabilités de chaque résultat.

2.3 Arbres pondérés

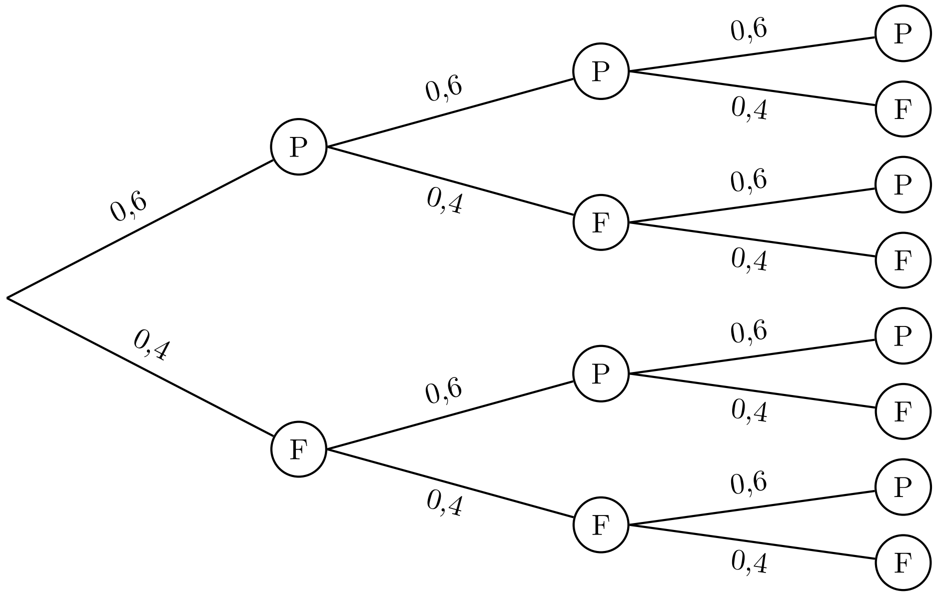
On peut représenter la situation précédente par un arbre pondéré. Chaque branche est affecté d'un coefficient égal à la probabilité de l'événement auquel elle aboutit. La somme des coefficients situés sur les branches qui partent d'un nœud vaut 1.

Exemple : Répétition de deux expériences à trois issues A, B, C, de façon identique et indépendante :



L'intérêt de l'arbre est le suivant : une liste de résultats correspond à un parcours sur l'arbre, partant du nœud principal à gauche pour aboutir à un des nœuds terminaux. La probabilité de cette liste est alors le produit des probabilités rencontrées sur chacune des branches du parcours.

Exemple numérique : On lance une pièce truquée. La probabilité de tomber sur pile est de 0,6 et la probabilité de tomber sur face est 0,4.



On peut calculer, par exemple : $P(\mathrm{P},\mathrm{F},\mathrm{P}) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}144$.