Variables aléatoires réelles

1 Définition

On adopte la définition suivante (elle sera modifiée et précisée dans l'enseignement supérieur) :

Définition 1
Une **variable aléatoire (discrète) finie** est une variable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ... , x_n, chacune avec une certaine probabilité.

C'est l'équivalent d'un caractère quantitatif discret en statistiques. En particulier, on obtient une variable aléatoire en considérant les issues d'une expérience aléatoire dont les résultats sont numériques et en nombre fini.

On désigne habituellement une variable aléatoire avec une majuscule : X, Y, etc. La probabilité que X prenne la valeur x_i se note $P(X = x_i)$ (ou parfois $P(x_i)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.)

Définition 2
La **loi de probabilité** d'une v.a. X est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe la probabilité $P(X = x_i)$. On la représente habituellement à l'aide d'un tableau.

Valeur prise	x_1	x_2	...
Probabilité de cette valeur	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...

Exemple :

On lance un dé. On appelle X la variable aléatoire qui représente résultat obtenu. X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chacune de ces valeurs a pour probabilité $\dfrac{1}{6}$.

La loi de probabilité de X est donc :

Valeur prise	1	2	3	4	5	6
Probabilité de cette valeur	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On peut écrire par exemple : $P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$, $P(X \leq 2) = \dfrac{2}{6}$, etc.

2 Espérance d'une variable aléatoire

C'est l'équivalent de la moyenne en statistiques, les fréquences étant remplacées par les probabilités.

Définition 3
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ... , x_n. **L'espérance** de X, notée $E(X)$ est le nombre :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$$

Autrement dit, on multiplie chaque valeur par sa probabilité et on fait la somme.

Pour alléger les notations, posons : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc. On obtient :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$.

Alors : $E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$

3 Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ... , x_n. On pose comme précédemment : $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, etc.

Définition 4
La variance de X, notée $V(X)$ est le nombre :

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n \times (x_n - E(X))^2$$

Remarque : $V(X)$ est un nombre positif. En effet, les carrés sont positifs et les probabilités p_i sont des nombres positifs.

Définition 5
L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple :

Reprenons toujours le même exemple : X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 chacune avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et $E(X) = 3{,}5$.

Alors : $V(X) = \frac{1}{6} \times (1-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \times (2-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \times (3-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \times (4-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \times (5-3{,}5)^2 + \frac{1}{6} \times (6-3{,}5)^2$

$V(X) = \frac{1}{6}(6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25) = \frac{17{,}5}{6} \simeq 2{,}92$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 1{,}71$