

# Corrigé du devoir surveillé n°9

## Exercice 1 :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}^2 = OA^2 = a^2$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = a^2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = a^2 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OD \times \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = a^2 \times \cos(\pi) = -a^2$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF} = AD \times BF \times \cos(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BF}) = AD \times BF \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = AC \times AE \times \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \sqrt{3}a \times \sqrt{3}a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}a^2$$

## Exercice 2 :

- 1) Dans le repère  $(A; \vec{i}; \vec{j})$ , on a  $A(0;0)$ ,  $B(a;0)$ ,  $D(0;a)$ ,  $J\left(0; \frac{a}{2}\right)$ ,  $I\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ ,  $K\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right)$ .

$$\text{Donc } \overrightarrow{BJ}\left(-a; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AK}\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right).$$

Ainsi :  $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AK} = -a \times \frac{a}{4} + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 0$ . Par conséquent, les deux vecteurs  $\overrightarrow{BJ}$  et  $\overrightarrow{AK}$  sont orthogonaux, et donc les droites (BJ) et (AK) sont perpendiculaires.

- 2) Comme K est le milieu de [ID], on a l'égalité classique :  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .

$$\text{Donc } \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BJ} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} + 0 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} \text{ car } \overrightarrow{AJ} \text{ et } \overrightarrow{AI} \text{ sont orthogonaux.}$$

On peut aussi justifier ceci en remarquant que A est le projeté orthogonal de J sur (AI).

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} \text{ car } \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{AD} \text{ sont orthogonaux.}$$

On peut aussi justifier ceci en remarquant que A est le projeté orthogonal de B sur (AD).

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2} \text{ car les deux vecteurs sont colinéaires et de sens contraire.}$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{2} \text{ car les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens.}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0. \text{ Donc } \overrightarrow{BJ} \text{ et } \overrightarrow{AK} \text{ sont orthogonaux.}$$

### Exercice 3 :

- 1) La tangente en B à  $\mathcal{C}$  est la droite passant par B et perpendiculaire à (AB). C'est donc l'ensemble des points M tels que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ .

Or  $\overrightarrow{AB}(-3;4)$  et en notant  $(x;y)$  les coordonnées de M,  $\overrightarrow{BM}(x+1;y-3)$ .

Alors,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$  équivaut à :  $-3(x+1)+4(y-3)=0$  soit  $-3x+4y-3-15=0$  ou  $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ .

Une équation de la tangente en B au cercle  $\mathcal{C}$  est donc :  $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ .

- 2) Le cercle  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant :  $AM=AB$ .

C'est équivalent à :  $AM^2 = AB^2$ . Or, on a :  $AM^2=(x-2)^2+(y+1)^2$  et  $AB^2=(-3)^2+4^2=25$ .

Donc l'équation de  $\mathcal{C}$  est :  $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ .

Si on développe, on obtient :  $x^2-4x+4+y^2+2y+1=25$  soit  $x^2-4x+y^2+2y=20$ .

### Exercice 4 :

- 1) Coordonnées polaires : B  $\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$  ; E  $\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$ .

Coordonnées cartésiennes : B(1;1) ; E  $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

- 2)  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ . Donc une mesure de  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$  est :  $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ .

- 3) On a d'une part :  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} = OB \times OE \times \cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OE}) = \sqrt{2} \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

D'autre part :  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .

On a donc :  $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  soit  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ .

On peut donc écrire :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ .

### Exercice 5 :

- 1) C'est le « théorème de la médiane » :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 1 \text{ puisque } IA = \frac{AB}{2} = 1.$$

- 2) D'après la question 1),  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$  équivaut à  $MI^2 - 1 = 3$  soit  $MI^2 = 4$  soit encore  $MI = 2$ .

L'ensemble des points M cherché est donc le **cercle**  $\mathcal{C}$  de centre I et de rayon 2.

