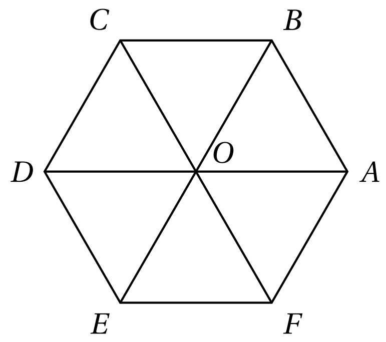
Mathématiques - Devoir surveillé n° 9

Exercice 1 (4 points) :

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et de côté 2.



Calculer les produits scalaires suivants (justifier la réponse) :

1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$
2. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DB}$
3. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{EB}$

Exercice 2 (6 points) :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(-2;0)$, $B(4;-2)$ et $C(1;5)$.

1. Calculer en utilisant les coordonnées le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
2. Calculer les longueurs CA et CB.
3. En déduire $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$ et une mesure en degrés de $\widehat{ACB}$ arrondie au dixième.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) perpendiculaire à (AB) passant par C.

Exercice 3 (6 points) :

ABC est un triangle tel que $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 11$ cm.

1. Montrer en utilisant la relation de Chasles que $BC^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la mesure de $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré.
4. Soit I le milieu de $[AB]$.
   Démontrer que $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + 2IA^2$
5. En déduire la longueur CI. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième près.

Exercice 4 (4 points) :

Soit ABC un triangle.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   On peut, par exemple, écrire : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$.
2. Montrer que si M est l'intersection de deux des hauteurs du triangle ABC, alors M appartient aussi à la troisième hauteur.
   En déduire que les trois hauteurs du triangle sont concourantes.