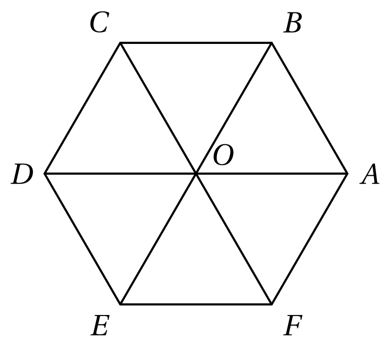
Correction du devoir surveillé n° 9

Exercice 1 :

$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O et de côté 2.



1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot (-\overrightarrow{OA}) = -OA^2 = -4$
2. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ car $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{DB}$.
   En effet, $BC = BO$ et $DC = DO$, donc (DB) est la médiatrice du segment $[CO]$.
   Par conséquent, (DB) et (CO) sont perpendiculaire, et comme $F \in (CO)$, alors $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{DB}$.
3. Soit I le milieu de $[OA]$.
   Comme le triangle OBA est équilatéral, alors la médiane (BI) est aussi une hauteur, donc I est aussi le projeté orthogonal de B sur (DA).
   On calcule le produit scalaire grâce au projeté orthogonal : $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI} = DA \times DI = 4 \times 3 = 12$
4. $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{OB}$
   Donc $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{OF} \cdot 2\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \times OF \times OB \times \cos(\widehat{FOB}) = 4 \times 2 \times 2 \times \cos(120°) = -8$

Exercice 2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(-2;0)$, $B(4;-2)$ et $C(1;5)$.

1. $\overrightarrow{CA}(-3;-5)$; $\overrightarrow{3;-7}$
   Donc : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -3 \times 3 - 5 \times (-7) = 26$
2. $CA = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$
   $CB = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$
3. On a : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$
   Donc : $26 = \sqrt{34} \times \sqrt{58} \times \cos(\widehat{ACB})$, soit : $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{26}{\sqrt{34} \times \sqrt{58}}$
   On trouve à la calculatrice : $\widehat{ACB} \simeq 54{,}2°$
4. Comme (d) est perpendiculaire à (AB), alors $\overrightarrow{AB}(6;-2)$ est un vecteur normal à (d).
   D'après le cours, (AB) admet alors une équation cartésienne de la forme : $6x - 2y + c = 0$.
   Il reste à trouver c ; comme $C \in (d)$, on remplace x et y par les coordonnées de C :
   $6 \times 1 - 2 \times 5 + c = 0$, donc $c = 4$.
   Ainsi, (d) admet pour équation cartésienne : $6x - 2y + 4 = 0$.

Exercice 3 :

ABC est un triangle tel que $AB = 10$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 11$ cm.

1. $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(-\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2 \times \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$
2. D'après la question précédente : $BC^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$, donc : $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2 + AC^2 - BC^2$
   Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \dfrac{10^2 + 7^2 - 11^2}{2} = 14$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
   Donc : $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{14}{10 \times 7} = 0{,}2$
   À la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC} \simeq 78{,}5°$
4. $CA^2 + CB^2 = \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{IA}\right)^2$
   $CA^2 + CB^2 = \overrightarrow{CI}^2 + 2\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{CI}^2 - 2\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 = 2CI^2 + 2IA^2$
5. Comme I est le milieu de $[AB]$, alors $IA = \dfrac{AB}{2} = 5$
   On obtient d'après la question précédente : $7^2 + 11^2 = 2CI^2 + 2 \times 5^2$, soit $2CI^2 = 120$ et donc $CI^2 = 60$
   Ainsi : $CI = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \simeq 7{,}7$ cm.

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle.

1. Utilisons l'indication donnée : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$. On a ainsi :

   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right) \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$

   Développons :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$

   Changeons l'ordre des termes pour mieux voir :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB}$

   On peut écrire : $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{CM}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CM}$

   Remplaçons :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CM}$

   Factorisons :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right)$

   Appliquons la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}$

   Ainsi :
   $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
2. Par exemple, soit M l'intersection de la hauteur (d_A) issue de A et de la hauteur (d_B) issue de B.

   Comme $M \in (d_A)$, alors par définition : $(MA) \perp (BC)$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
   De même, comme $M \in (d_B)$, alors : $(MB) \perp (CA)$, donc $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

   D'après l'égalité démontrée dans la première question, ceci entraîne : $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
   Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, et donc : $(MC) \perp (AB)$.

   Ceci montre que M appartient aussi à la hauteur issue de C.

   On a démontré que l'intersection de deux des hauteurs d'un triangle appartient aussi à la troisième hauteur. Ainsi, les trois hauteurs d'un triangle sont toujours concourantes.