Corrigé de l'exercice nº93 page 370

Le but des 2 premières questions est d'obtenir l'équation de la question 3. Il y a une manière plus rapide de parvenir à cette équation ; elle utilise les nombres complexes, que vous verrez en terminale.

Question 1 :

On a AB = AE, et OB = OE, donc (OA) est la médiatrice de [BE], d'après la propriété classique : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

D'autre part, les triangles ABC et AED sont superposables : en effet, $\widehat{CBA} = \widehat{DEA}$, AB=AE=BC=ED.
Donc AC=AD.
Comme d'autre part, OC = OD, (OA) est aussi la médiatrice de [CD].

Autrement dit, (B ; E) et (C ; D) sont deux couples de points symétriques par rapport à (OA).

Autre méthode :

On considère les coordonnées polaires de A, B, C, D, E.

B a pour coordonnées polaires [1 ; 2π/5] ; E [1 ; –2π/5].
Comme cos(2π/5) = cos(– 2π/5) et sin(2π/5) = –sin(2π/5), les deux points B et E ont même abscisse et des ordonnées opposées, donc ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Question 2 :

C'est la même méthode, en permutant les points, ce qui revient à faire les calculs dans une autre repère orthonormé, $(O : \vec{i}' ; \vec{j}')$, où $\vec{i}' = \overrightarrow{OB}$.

Bref, on obtient la conclusion : (A ; C) et (E ; D) sont deux couples de points symétriques par rapport à (OB).

****

Soit G l'isobarycentre de {A ; B ; C ; D ; E}.
Soit T l'isobarycentre de {B ; E}. Soit U l'isobarycentre de {C ; D}.

Comme T est le milieu de [BE], alors d'après la question 1), T appartient à (OA), médiatrice de [BE].
Comme U est le milieu de [BE], alors de la même façon, T appartient à (OA).

D'après la propriété d'associativité de barycentre, on peut remplacer {(B ; 1) ; (E ; 1)} par (T ; 2) dans la définition de G.
De la même façon, on peut remplacer {(C ; 1) ; (D ; 1)} par (U ; 2).

Par conséquent : G est barycentre de {(A ; 1) ; (T ; 2) ; (U ; 2)}. Comme A, T, U appartiennent à (AO), alors G appartient lui aussi à (AO).

En effet, on a d'après le cours : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AT} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AU} = k\overrightarrow{AO} + k'\overrightarrow{AO} = m\overrightarrow{AO}$ où k, k' et m sont des nombres qu'on ne cherche pas à préciser. Autrement dit, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires.

****

On applique la même méthode en considérant l'isobarycentre de {A ; C} et l'isobarycentre de {E ; D}. On conclut que G appartient aussi à (BO).

Comme G appartient à la fois aux droites sécantes (AO) et (BO), alors G = O.

Question 3 :

On peut utiliser la formule donnant les coordonnées du barycentre.

On peut aussi écrire directement :

Comme O est l'isobarycentre de {A ; B ; C ; D ; E}, alors par définition $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. Ce qui donne, en passant aux coordonnées : $\begin{cases} x_A+x_B+x_C+x_D+x_E=0 \\ y_A+y_B+y_C+y_D+y_E=0 \end{cases}$.

Or : $x_A=1$; $x_B=\cos(2\pi/5)$; $x_C=\cos(4\pi/5)$; $x_D=\cos(-4\pi/5)$; $x_E=\cos(-2\pi/5)$.

Tenant compte du fait que $\cos(-2\pi/5)=\cos(2\pi/5)$ et $\cos(-4\pi/5)=\cos(4\pi/5)$, on obtient :

$$\boxed{1+2\cos(2\pi/5)+2\cos(4\pi/5)=0}. \ (1)$$

Question 4 :

On applique la formule de duplication : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ avec $a = 2\pi/5$. Cela donne :
$\cos(4\pi/5) = \cos(2\times 2\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1 = 2x^2 - 1$.
On remplace dans l'équation (1) : $1 + 2x + 2\times(2x^2-1) = 0$ soit $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

C'est une équation de second degré. A priori, elle a au moins une racine, $\cos(2\pi/5)$.

$\Delta=2^2-4\times4\times(-1)=20$. Δ est strictement positif, donc il y a deux racines, tout va bien.

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2\times4}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2\times4}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \ ; \ x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2\times4}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2\times4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Il y a deux solutions, laquelle est la bonne ?
On s'aperçoit que x_2 est négatif car son numérateur est négatif et son dénominateur est positif. Or, $\cos(2\pi/5)$ est positif, car $0 < 2\pi/5 < \pi/2$. Par conséquent, la valeur correcte est x_1.

Autrement dit : $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

****

On peut en déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$ toujours à l'aide de la formule de duplication :

$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1$ donc $\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2}$, ce qui donne : $\cos(a)=\sqrt{\frac{\cos(2a)+1}{2}}$ ou $-\sqrt{\frac{\cos(2a)+1}{2}}$.

Tenant compte comme précédemment du fait que $\cos(\pi/5)$ est positif, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{5}-1+4}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+6}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{1+2\sqrt{5}+5}=\frac{1}{4}\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

****

Calculons à présent $\sin(\pi/5)$.
On sait que pour tout a, $\cos^2(a)+\sin^2(a)=0$. Donc $\sin(a)=\sqrt{1-\cos^2(a)}$ ou $-\sqrt{1-\cos^2(a)}$. Ici, on voit comme précédemment que $\sin(\pi/5)$ est positif.
On a donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}}=\sqrt{\frac{16-\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{16-\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{16-1-2\sqrt{5}-5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

et donc : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}}$.

Remarques :

1) On appelle nombre d'or le nombre $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On voit alors que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\varphi}{2}$. Le nombre φ est une des solutions de l'équation $x^2 = x + 1$.

2) On a vu que cos(2π/5) est la solution positive de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. On peut se demander : que représente l'autre solution ?
Pour répondre à cette question, remarquons d'abord que cos(8π/5) = cos(–2π/5) = cos(2π/5).
La formule $1+2\cos(2\pi/5)+2\cos(4\pi/5)=0$ peut donc s'écrire aussi : $1+2\cos(8\pi/5)+2\cos(4\pi/5)=0$.

Reprenons la formule de duplication : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$, avec cette fois, $a = 4\pi/5$.
On obtient : $\cos(8\pi/5) = \cos(2\times4\pi/5) = 2\cos^2(4\pi/5) - 1$.
On peut donc remplacer cos(8π/5) par $2\cos^2(4\pi/5) - 1$ dans la formule $1+2\cos(8\pi/5)+2\cos(4\pi/5)=0$.
Posant : $\cos(4\pi/5) = x$, on obtient : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Ainsi, cos(4π/5) est l'autre solution (x_2) de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

On remarque que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ce qui est logique puisque $\cos(\pi-a)=-\cos(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On peut le vérifier en écrivant : $\cos(4\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-1=\frac{2}{16}(\sqrt{5}-1)^2-1=\frac{1}{8}(5-2\sqrt{5}+1)-1=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})-1=\frac{1}{4}(3-\sqrt{5}-4)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$. Ça marche.

On peut se demander : est-ce un hasard si cos (2π/5) et cos(4π/5) sont solutions de la même équation ?
La réponse est non. Ce n'est pas un hasard. Mais la justification n'est pas du niveau première S.
L'étude de cette question fait partie de ce qu'on appelle la théorie des corps, une des branches les plus passionnantes de mathématiques.