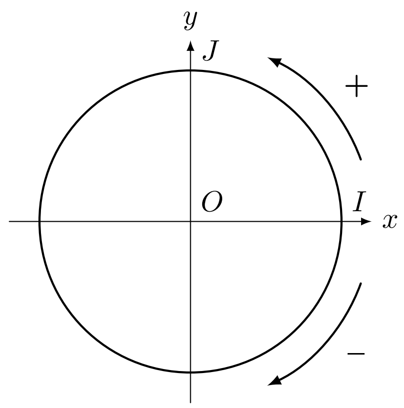
Trigonométrie

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ; I\ ; J)$.

1 Cercle trigonométrique

Définition 1

- Un cercle orienté est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct et le sens indirect.
  Le sens direct correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.
  On parle aussi parfois de sens positif ou sens trigonométrique.
- Le cercle trigonométrique est le cercle centré en O (l'origine du repère), de rayon 1 et orienté dans le sens direct.



2 Le radian

Définition 2
Soient A et B deux points du cercle trigonométrique. La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

Remarque :

Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians : 360 degrés $= 2\pi$ radians ou encore 180 degrés $= \pi$ radians.

Tableau de conversion :

Mesure en degrés	30	45	60	90	180	360
Mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

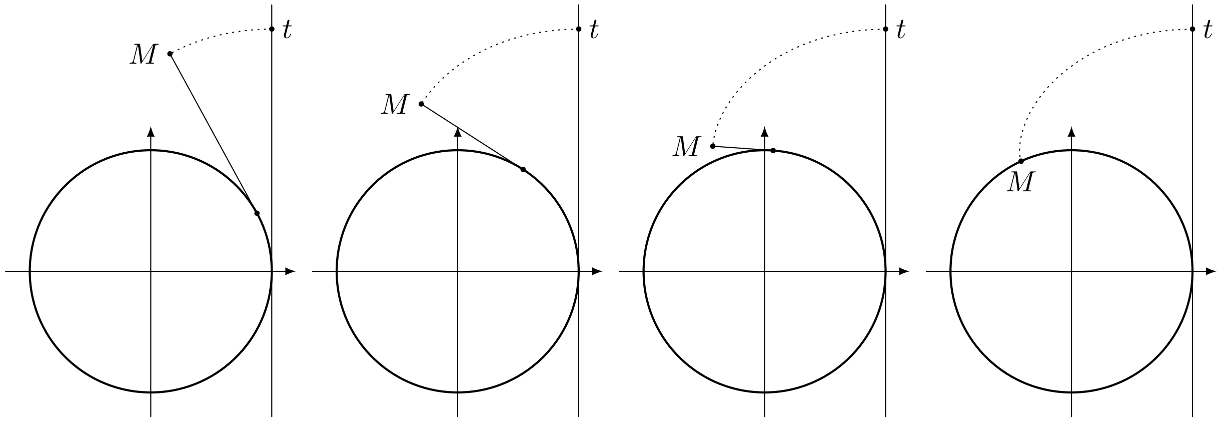
3 Enroulement de la droite numérique sur le cercle

3.1 Définition

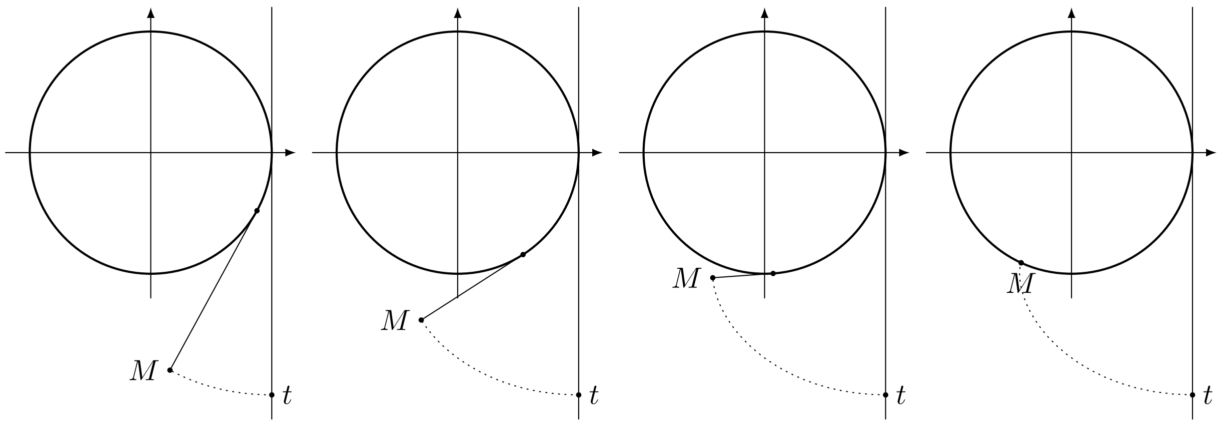
Une expérience simple montre qu'on peut « enrouler » la droite réelle sur le cercle trigonométrique. De cette façon, à chaque nombre réel t, on fait correspondre un point bien déterminé M sur le cercle trigonométrique. On dit que le point M est repéré par le réel t par enroulement, ou que M est l'image du réel t.

Par convention, on « enroule » la droite (verticale) d'équation $x = 1$. On part d'un point M de la droite, de coordonnées $M(1\,;t)$. Après enroulement, M occupe une certaine position sur le cercle.

Le schéma suivant illustre le cas où t est positif. (On enroule en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.)



Si t est négatif, on enroule dans l'autre sens :



3.2 Propriétés

Si deux réels t et t' sont distants d'un ou plusieurs tours complets, on voit qu'ils correspondent par enroulement au même point du cercle. Or, la longueur d'un tour complet est 2π.

Propriété 1
Deux réels t et t' repèrent (par enroulement) le même point du cercle trigonométrique si et seulement si $t - t'$ est un multiple de 2π.

Conséquence importante : Un réel t définit par enroulement un seul point du cercle.

Mais un point M du cercle est repéré par une infinité de nombres réels. Si α est l'un d'eux, les autres sont $\alpha + 2\pi$, $\alpha - 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha - 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, $\alpha - 6\pi$, etc.

Propriété 2
Si M est l'image du nombre α, alors M est exactement l'image tous les nombres de la forme $\alpha + k2\pi$, où k est un nombre entier relatif (c'est à dire positif ou négatif).

Notation : L'ensemble des entiers positifs ou négatifs se note $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{0\,;1\,;-1\,;2\,;-2\,;3\,;-3\,;...\}$

On note donc : M est repéré par les nombres de la forme $\alpha + k2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : La propriété précédente définit une *équivalence*.

Soit α, un nombre dont l'image par enroulement est le point M.

Alors il y a équivalence entre :
- t a pour image M par enroulement ;
- $t = \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 Sinus et cosinus d'un nombre réel

4.1 Définitions

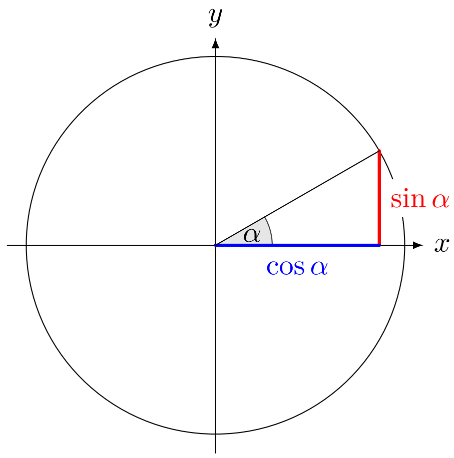
Soit x un réel quelconque. Soit M le point du cercle trigonométrique image de x par enroulement.

Définition 3

- Le **cosinus** de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M dans le repère $(O\,;I\,;J)$.
- Le **sinus** de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

Ainsi, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.



4.2 Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

Propriété 3

- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
  On dit que cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  On dit que la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus **impaire**.
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
- $[\cos(x)]^2 + [\sin(x)]^2 = 1$

Ces propriétés se retrouvent graphiquement en considérant le cercle trigonométrique.

4.3 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

5 Fonctions circulaires

Définition 4
La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$; la fonction sinus est la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

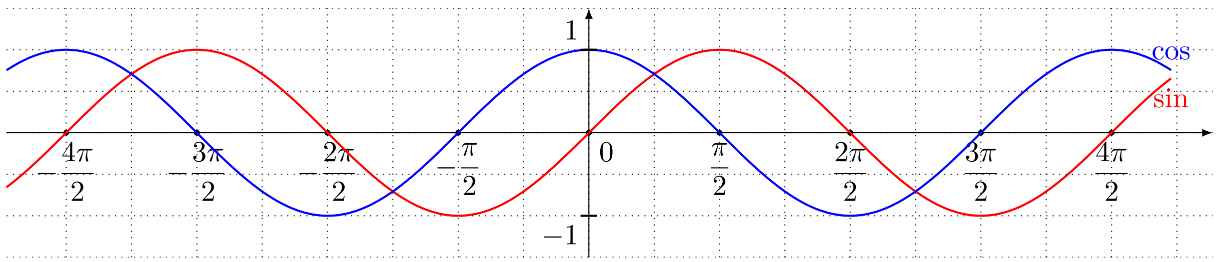
Les tableaux de variations :

On donne ici les variations sur $[0; 2\pi]$ (obtenues à partir de la définition). Comme cosinus et sinus sont périodiques de période 2π, on observe les mêmes variations sur $[2\pi; 4\pi]$, sur $[4\pi; 6\pi]$, sur $[-2\pi; 0]$, etc.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

Représentation graphique :



On remarque la périodicité.

6 Utilisation de la calculatrice

Obtenir le cosinus et le sinus d'un nombre ne présente pas de difficulté. On utilise la touche `cos` ou `sin`. Il faut simplement vérifier que la calculatrice est en mode radian.

En revanche, il faut faire attention lorsqu'on cherche un nombre t tel que $\cos(t)$ ou $\sin(t)$ est donné.

On utilise les touches notées en général `Arcccos` et `Arcsin` ou `cos⁻¹` et `sin⁻¹`. Mais comme une infinité de réponses sont possibles, la calculatrice en choisit une. Il faut donc savoir que :

- parmi tous les nombres t tel que $\cos(t)$ est donné, elle donne celui qui appartient à $[0\,;\pi]$
- parmi tous les nombres t tel que $\sin(t)$ est donné, elle donne celui qui appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Si la valeur de t cherchée n'appartient pas à cet intervalle, un calcul complémentaire doit être effectué.