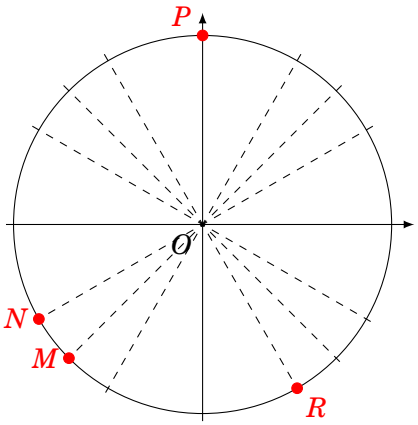
Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 :



Exercice 2 :

1. On cherche si $\alpha - \beta$ est un multiple de 2π.

   a) $\alpha = -\dfrac{19\pi}{7}$ et $\beta = \dfrac{93\pi}{7}$.

   $\alpha - \beta = -\dfrac{19\pi}{7} - \dfrac{93\pi}{7} = -\dfrac{112\pi}{7} = -16\pi$

   -16π est un multiple de 2π.

   Donc $-\dfrac{19\pi}{7}$ et $\dfrac{93\pi}{7}$ sont des mesures d'un même angle orienté.

   b) $\alpha = \dfrac{19\pi}{8}$ et $\beta = \dfrac{111\pi}{8}$.

   $\alpha - \beta = \dfrac{19\pi}{8} - \dfrac{111\pi}{8} = -\dfrac{92\pi}{8} = \dfrac{23\pi}{2}$

   $\dfrac{23\pi}{2}$ n'est pas un multiple de 2π.

   Donc $\dfrac{19\pi}{8}$ et $\dfrac{111\pi}{8}$ ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

   c) $\alpha = \dfrac{8\pi}{11}$ et $\beta = \dfrac{96\pi}{11}$.

   $\alpha - \beta = -\dfrac{8\pi}{11} - \dfrac{96\pi}{11} = -\dfrac{88\pi}{11} = -8\pi$

   -8π est un multiple de 2π.

   Donc $\dfrac{8\pi}{11}$ et $\dfrac{96\pi}{11}$ sont des mesures d'un même angle orienté.

2. On sait que la mesure principale d'un angle est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
   Par ailleurs, deux mesures du même angle sont distantes d'un multiple de 2π.

   a) $\alpha = -\dfrac{36\pi}{7}$

   $-\dfrac{36\pi}{7} \notin]-\pi\,;\pi]$.

   $-\dfrac{36\pi}{7} + 6\pi = -\dfrac{36\pi}{7} + \dfrac{42\pi}{7} = \dfrac{6\pi}{7} \in]-\pi\,;\pi]$.

   La valeur principale est donc $\dfrac{6\pi}{7}$.

b) $\alpha = \dfrac{43\pi}{5}$

$\dfrac{43\pi}{5} \notin]-\pi\,;\pi]$.

$\dfrac{43\pi}{5} - 8\pi = \dfrac{43\pi}{5} - \dfrac{40\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5} \in]-\pi\,;\pi]$.

La valeur principale est donc $\dfrac{3\pi}{5}$.

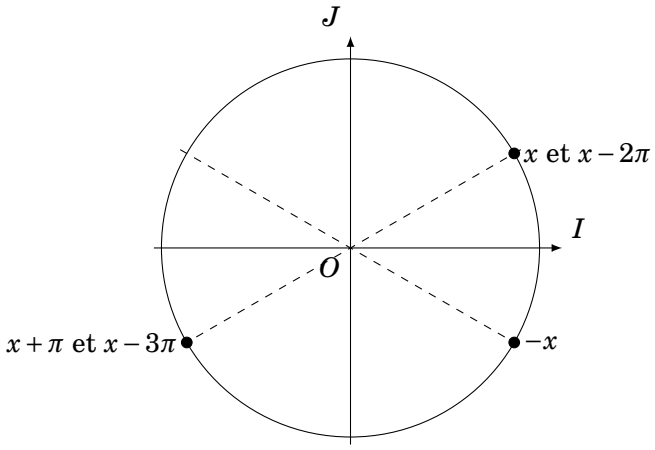
c) $\alpha = -\dfrac{19\pi}{33}$

$-\dfrac{19\pi}{33} \in]-\pi\,;\pi]$.

La valeur principale est donc $-\dfrac{19\pi}{33}$.

Exercice 3 :

1. $A = \sin(x+\pi) + \sin(-x) - \cos(x-3\pi) + \sin(x-2\pi)$



Le dessin montre que :

$\sin(x+\pi) = \sin(-x) = -\sin(x)$

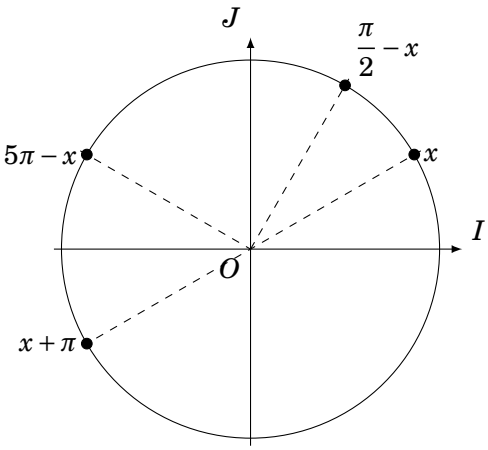
$\cos(x-3\pi) = -\cos(x)$

$\sin(x-2\pi) = \sin(x)$

Par conséquent : $A = -\sin(x) - \sin(x) + \cos(x) + \sin(x) = \cos(x) - \sin(x) = 0{,}96 - 0{,}28$

$A = 0{,}68$

2. $B = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin(x+\pi) - \cos(x+\pi)$



Le dessin montre que :

$\cos(5\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

Par conséquent : $B = -\cos(x) - \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) = \sin(x) - \cos(x) = 0{,}28 - 0{,}96$

$B = -0{,}68$

Exercice 4 :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$ équivaut à $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   D'après la propriété du cours, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   Solutions sur $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi\,;\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\}$

   $\frac{\pi}{6} \in [0\,;2\pi[$

   $\frac{5\pi}{6} \in [0\,;2\pi[$

   Solutions sur $[0\,;2\pi[$: $\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$

2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
   D'après la propriété du cours, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   Solutions sur $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{3\pi}{4} + k2\pi\,;-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right\}$

   $\frac{3\pi}{4} \in [0\,;2\pi[$

   $-\frac{3\pi}{4} \notin [0\,;2\pi[$; on calcule : $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

   Solutions sur $[0\,;2\pi[$: $\left\{\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\right\}$

3. $\sin(x) + 1 = 0$ équivaut à $\sin(x) = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
   D'après la propriété du cours, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarquons que les deux lignes définissent le même ensemble de solutions car $-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}$.

Solutions sur $\mathbb{R}$: $\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$

$-\frac{\pi}{2}\notin[0\,;2\pi[$

$\frac{3\pi}{2}\in[0\,;2\pi[$

Solution sur $[0\,;2\pi[$: $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$