Correction du devoir surveillé n° 9

Exercice 1 :

1. $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $-\dfrac{11\pi}{4}$

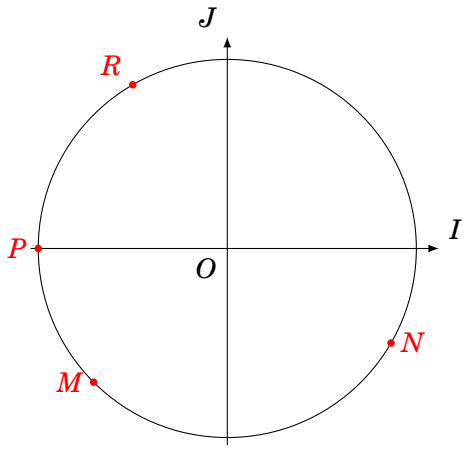
   La mesure principale est : $\boxed{-\dfrac{3\pi}{4}}$ car $-\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{11\pi}{4} + 2\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$.

   On applique la même méthode pour la suite.
2. $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\dfrac{47\pi}{6}$

   La mesure principale est : $\boxed{-\dfrac{\pi}{6}}$
3. $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OP})$ mesure $-\dfrac{50\pi}{2}$

   La mesure principale est : $\boxed{\pi}$
4. $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OR})$ mesure $\dfrac{122}{3}$

   La mesure principale est : $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$



Exercice 2 :

1. $A = \sin(x-\pi) + \cos(-x) - \sin(x+3\pi) + \cos(x-2\pi)$

   Un petit dessin montre que :
   - $\sin(x-\pi) = -\sin(x)$
   - $\cos(-x) = \cos(x)$
   - $\sin(x+3\pi) = -\sin(x)$
   - $\cos(x-2\pi) = \cos(x)$

   Par conséquent : $A = -\sin(x) + \cos(x) + \sin(x) + \cos(x) = 2\cos(x)$, soit $\boxed{A = 1{,}92}$.

2. $B = \cos(\pi - x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi - x) - \cos(x + 5\pi)$

   Un nouveau petit dessin montre que :
   - $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
   - $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
   - $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
   - $\cos(x + 5\pi) = -\cos(x)$

   Par conséquent : $B = -\cos(x) - \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) = -2\sin(x)$, soit $\boxed{B = -0{,}56}$.

Exercice 3 :

1. $\sin x = \dfrac{1}{2}$

   Ceci équivaut à : $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

   D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

   $$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

   Sur $[0;2\pi[$, les solutions sont : $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Ceci équivaut à : $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

   D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

   $$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

   Sur $[0;2\pi[$, les solutions sont : $\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{4}$.

Exercice 4 :

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

   Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2\times 3 + 2\times 3 = 0$.

   $AB = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

   $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

2. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.

   On obtient : $\cos(\widehat{BAC}) = 0$, donc $\widehat{BAC}$ mesure $90°$.

Exercice 5 :

1. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

   On peut aussi écrire cette égalité directement (c'est la règle du parallélogramme pour la somme de deux vecteurs.)

   On en déduit :

   $BD^2 = \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + BC^2$

2. De même : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

   On en déduit :

   $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = \left(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(-\overrightarrow{BA}\right)^2 - 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + BC^2$

3. On ajoute membre à membre les deux égalités précédentes, la somme des doubles produits est nulle, donc on obtient l'égalité de l'énoncé.

4. $BD^2 + AC^2 = 2BA^2 + 2BC^2$ donc $BD^2 = 2BA^2 + 2BC^2 - AC^2 = 2 \times 5^2 + 2 \times 4^2 - 8^2 = 18$
   Donc : $BD = \sqrt{18} \simeq 4{,}2$.